

Elektronische Signalverarbeitung

Skript mit Übungen zum Unterricht

Eine praxisorientierte Einführung in die Theorie und Anwendung der analogen und digitalen Signalverarbeitung.

Verfasser: Gerhard Krucker
Hochschule für Technik und Architektur Bern
Morgartenstr 2c
3014 Bern
Tel: 031 33 55 295 (111)

Ausgabe: 1. Ausgabe, Sommer 2000

Zielsetzungen

- Kenntnis des Aufbaus, Wirkungsweise und angewandte Schaltungstechnik mit Operationsverstärkern
- Umfassendes Wissen über analoge und digitale Bearbeitung von Signalen..
- Sie sollen selbständig Schaltungen analysieren und dimensionieren können!

Inhalte

In Anlehnung an die Lehrplanvorgaben werden folgende Stoffgebiete vermittelt:

Operationsverstärker:	Idealer Op-Amp Grundsaltungen mit idealen OpAmps Realer Operationsverstärker, Nichtlineare Schaltungen
Filtertechnik	Charakteristiken, Übertragungsfunktionen Aktive Teilfilter Impedanzkonverter
Diskrete Schaltungen	Differenzverstärker Stromspiegel
Dig. Signalverarbeitung	Grundlagen, Normen A/D-D/A Wandler Z-Transformation Filter

Etwas detaillierter:

OpAmp Grundlagen:

- Realer Op-Amp mit Offset, Ein- und Ausgangswiderständen, Open-Loop-Gain und Slew-Rate. Datenblattanalyse
- Aufbau handelsüblicher Op-Amp
- Berechnungen und Herleitungen am idealen Op-Amp mit Berücksichtigung von Open-Loop-Gain und Slew-Rate
- Anwendungen Op-Amp: Integrator, Differenziator, Gleichrichter, Summierer, Instrumentenverstärker, Schmitt-Trigger, Aktive Filter mit linearen quadratischen Teilfiltern, U/I- I/U, U-F-Wandler
- Transkonduktanzverstärker
- Rechenschaltungen (Multiplizierer, Logarithmierer, RMS-Rechner)

Filter

- Begriff Pole, Nullstellen aus Übertragungsfunktion
- Typen (Bessel, Butterworth, Tschebyscheff)
- RLC Realisation
- HP-BP-BS Transformation

Digitale Signalverarbeitung

- Aufbau kleiner Systeme auf Niveau Blockschaltbild
- Anwendungen, Normen
- Abtastung (Prinzipien): Nyquist, Delta-Sigma, Überabtastung,
- Grundlagen digitaler Filter, Bilineare Z-Transformation.

Differenzverstärker

- als kombinierte EBC-Schaltung
- Ein- und Ausgangswiderstände
- Verstärkungen, CMMR

Stromspiegel

Kaskodenschaltung

AD-DA Wandler , S&H-Schaltungen

Aufbau

- Der Kurs gliedert sich in Theorie- und Übungsblöcke.
- Die Übungen werden als Berechnungsaufgaben mit Taschenrechner sowie mit Computerhilfsmitteln (PSpice und MathCad) durchgeführt.
- Während des Studienjahres werden 4-5 Tests durchgeführt. Die Teilnahme ist obligatorisch.
Eventuell wird eine bewertete Studienarbeit mit Präsentation durchgeführt.
- Entschuldigungen nach Reglement sind **in jedem Fall schriftlich** mir persönlich zu überbringen.
- Streichnoten sind keine vorgesehen.
- Erlaubte Hilfsmittel für die schriftlichen Prüfungen:

Taschenrechner, Computer persönliche Formelsammlung, Skript und Übungen
- (Ich würde Ihnen empfehlen einen Computer anzuschaffen)

Literaturverzeichnis

Im Skript werden u.a. auf folgende Referenzen verwiesen ;
Zur Stoffergänzung (*) sind folgende Lehrbücher empfohlen:

- [BÖH96]* Elemente der angewandten Elektronik, Erwin Bömer, 1996, 10. Auflage, Vieweg Verlag, ISBN 3-528-94090-5
- [CHE95] The Circuits and Filters Handbook, Wai-Kai Chen, CRC Press-IEEE Press, 1995 ISBN 0.8493-8341-2
- [DAN74] Approximation Methods for Electronic Filter Design, Richard W. Daniels, McGraw-Hill 1974, ISBN 0-07-015308-6
- [DEN88] Rauschen als Information, Wolfgang Denda, Verlag Hüthig, 1988, ISBN 3-7785-1663-9
- [DOE89] Grundlagen der Regelungstechnik., Frank Dörrscheidt, 1989, Verlag Teubner, ISBN 3-519-06421-9
- [ELL94] Electronic Filter Analysis and Synthesis, Michael G. Ellis, 1994, Artech House, ISBN 0-89006-616-7
- [HER84] Aktive RC-Filter, 1984, Miklos Herpy/ Jean-Claude Berka, 1984, Franzis Verlag, ISBN 3-7723-7011-X
- [LAN94] Das Aktiv Filter Kochbuch, Don Lancaster, IWT Verlag 1994. 8. Aufl. (Übersetzung von ‚Active Filter Cookbook ‚,1981), ISBN 3-883222-007-8
- [MIL92] Entwurf analoger und digitaler Filter, Otto Mildenberger, Vieweg Verlag 1992, ISBN 3.528-06430-7
- [THE96] Analog and Digital Filter Design Using C, Les Thede, Prentice Hall 1996, ISBN 0-13-352627-5
- [TIE99]* Halbleiter Schaltungstechnik, U.Tietze/ Ch. Schenk, Springer Verlag 1999, 11. Aufl., ISBN 3-540-64192-0
- [TOB71] Operational Amplifiers, Tobey, Graeme, Huelsman 1971, McGraw-Hill, ISBN 07-064917-0
- [WAI75] Introduction to Operational Amplifiers Theory and Applications, J. Wait/ L. Huelsman/ G. Korn, McGraw-Hill, 1975, ISBN 0-07-067765-4
- [WDL91] Operationsverstärker Grundsaltungen, N. Waidelich, 1991, Skript HTA Bern,
- [WUP94] Professionelle Schaltungstechnik mit Operationsverstärkern, Horst Wupper,1994, Franzis Verlag , ISBN 3-7723-6732-1
- [ZOE97] Digitale Audiosignalverarbeitung, Udo Zölzer, B.G. Teubner Verlag, 1997 2. Aufl., ISBN 3-519-16180-X

Herstellerdatenbücher:

- [BBR82] Product Data Book, 1982, Burr-Brown Research Corporation.
- [BBR98] IC Databook, Linear & Mixed Signal Products, Burr-Brown Corporation, 1998
- [PMI88] Databook Precision Integrated Circuits, 1988, Precision Monolithic Circuits.
- [MOT76] Semiconductor Data Library Vol. 6/ Linear IC's , Motorola Semiconductor Products Inc., 1976

1 Operationsverstärker

1.1 Überblick

Operationsverstärker stammen ursprünglich aus der Analogrechner-technik. Grob gesehen, verstärken sie die an den Eingängen liegende Differenzspannung $u_D = u_+ - u_-$.

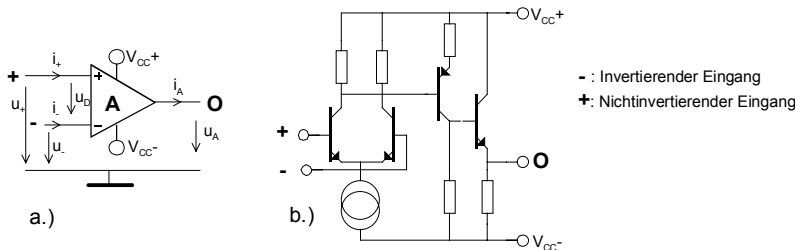


Bild 1-1
 Operationsverstärker Schaltsymbol und vereinfachte Detailschaltung.

Die Differenzverstärkerstufe am Eingang verstärkt die Differenzspannung u_D beim idealen Operationsverstärker um den Leerlauf(-differenz-)verstärkungsfaktor $A_D=A$. Die Ausgangsstufe koppelt das Signal niederohmig auf den Ausgang O aus. Die Versorgungsspannung V_{CC} ist im Regelfall symmetrisch zur Masse. Unsymmetrische Speisungen haben eine schlechtere Aussteuerbarkeit zur Folge.

Die Mehrzahl der Operationsverstärker arbeitet daher als spannungsgesteuerte Spannungsquelle. Ein Sonderfall ist der sog. Transkonduktanz-Verstärker. Sie zeigen das Verhalten einer spannungsgesteuerten Stromquelle.

Durch die teilweise extrem hohen Eingangswiderstände und Leerlaufverstärkungsfaktoren können Operationsverstärker universell eingesetzt werden. Sie ersetzen in vielen Fällen teilweise komplexe Schaltungen in diskreter Schaltungstechnik. Dies vereinfacht die Schaltungstechnik, vermindert den Stromverbrauch und verbessert die Zuverlässigkeit.

Die Operationsverstärker können in Bipolar-, CMOS- oder gemischter Technologie gefertigt werden. Bei gemischter und CMOS-Technologie wird der Differenzverstärker mit FETs realisiert. Dadurch erreicht man extrem hohe Eingangswiderstände.

1.2 Ausführungen

Operationsverstärker werden heute praktisch ausschliesslich in monolithischer Technik gefertigt. Hybrid- und in diskreter Technik aufgebaute Module waren bis in die 80er Jahre für hochwertige Schaltungen üblich. Sie sind jedoch heute vollständig durch monolithische IC verdrängt.

Neue Typen werden mittlerweile nur noch in den SMD-Plastikgehäuse Mini-DIP und SOIC angeboten. Standard-DIP wird vor allem für ältere Typen verwendet. Bausteine, welche MIL Spezifikationen erfüllen, werden zudem noch in TO- und Keramik-DIP angeboten. Zahlreiche Sondergehäuse werden für Isolationsverstärker und andere Spezial-OpAmp benutzt.

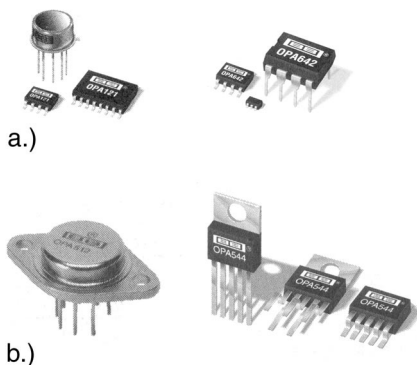


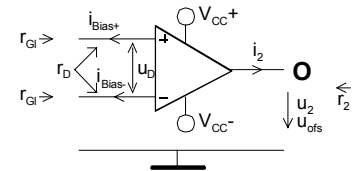
Bild 1-2: Ausführungen von Operationsverstärkern .
 a.) Monolithische OpAmp im TO, SOIC, Mini-DIP und DIP Gehäuse
 b.) Leistungs- OpAmp im TO-3, TO-220 und DDPACK Gehäuse.

Quelle: Burr-Brown IC Databook 1998

1.3 Idealer Operationsverstärker

Er stellt eine Vereinfachung des realen Operationsverstärkers dar und ist wie folgt typisiert:

$r_{Gl} = \infty$ [Ω]	Eingangswiderstand	} frequenzabhängig
$r_2 = 0$ [Ω]	Ausgangswiderstand	
$A_D = \infty$	Differenzverstärkung	
$A_G = 0$	Gleichtaktverstärkung	
$SR = \infty$ [V/S]	Max. Anstiegsgeschw. der Ausgangsspannung (Slew Rate)	
$i_{Bias} = 0$ [A]	Eingangsstrom	
$u_{ofs} = 0$ [V]	Offsetspannung	
$u_N = 0$ [V]	Rauschspannung	



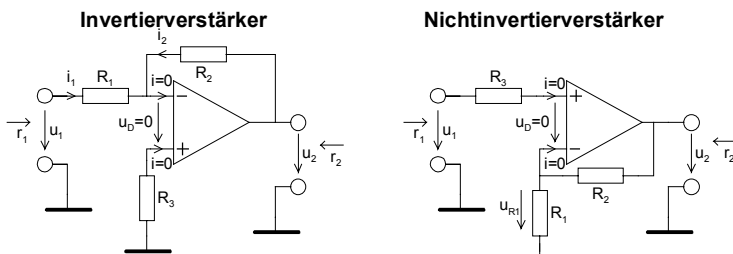
Wie wir sehen werden, sind diese Vereinfachungen in vielen Fällen durchaus zulässig. Die realen Einflussfaktoren werden in späteren Kapiteln berücksichtigt.

1.3.1 Grundschaltungen

Durch gezielte Rückführung (Gegenkopplung) wird die hohe Leerlaufverstärkung mit Widerständen gezielt auf die benötigte Betriebsverstärkung herabgesetzt. Neben einer genau definierten Verstärkung erhält man für die Praxis eine Reihe weiterer wünschenswerter Eigenschaften der Schaltung, wie niedriger Ausgangswiderstand, grössere Bandbreite, kleinerer Klirrfaktor, u.a.

Man unterscheidet bei reinen Verstärkerschaltungen zwischen invertierenden und nichtinvertierenden Schaltungen. Bei Invertierschaltungen wird die Phasenlage des Signals um 180° gedreht.

Invertierverstärker / Nichtinvertierverstärker



$$v_U = \frac{u_2}{u_1} = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$r_1 = R_1$$

$$r_2 = 0$$

$$R_3 = R_1 \parallel R_2$$

$$v_U = \frac{u_2}{u_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$r_e = \infty$$

$$r_a = 0$$

$$R_3 = R_1 \parallel R_2$$

Bild 1-3: Invertierender und nichtinvertierender Verstärker mit idealen Operationsverstärkern.

R_1 und R_2 definieren die Verstärkung v_U . R_3 dient zur Offsetkompensation.

$$(1-1) \quad (1-2)$$

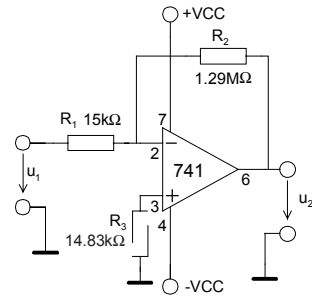
Die Verstärkungseinstellung erfolgt über die Widerstände R_1 und R_2 . R_3 dient zur Offsetkompensation. Bei FET-Op-Amp, geringen Anforderungen an die Offsetspannung oder anderweitiger Kompensation kann R_3 weggelassen werden.

Beispiel 1-1: (Verstärkerschaltung mit 741)

Man dimensioniere mit dem Op-Amp 741 eine Verstärkerschaltung mit $v_U = -86$ und $r_U = 15k\Omega$.

v_U ist negativ -> invertierender Verstärker!

$$\begin{aligned}
 r_U &:= 15 \cdot 10^3 \quad [\Omega] & v_U &:= -86 \quad (\text{Vorgaben}) \\
 R_1 &:= r_U & R_1 &= 1.5 \times 10^4 \quad [\Omega] \\
 R_2 &:= -v_U \cdot R_1 & R_2 &= 1.29 \times 10^6 \quad [\Omega] \\
 R_3 &:= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} & R_3 &= 1.483 \times 10^4 \quad [\Omega]
 \end{aligned}$$



Summierverstärker

Er bildet die arithmetische Summe der an den Eingängen anliegenden Spannungen $u_{11} \dots u_{12}$. Die Schaltung kann durch Zuschalten weiterer Widerstände R_{1x} beliebig erweitert werden.

Summierverstärker

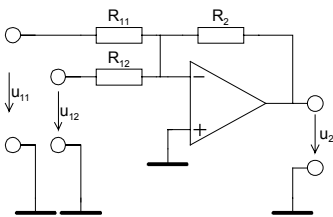


Bild 1-4: Grundschtung des invertierenden Summierverstärker.

$$u_2 = -R_2 \left(\frac{u_{11}}{R_{11}} + \frac{u_{12}}{R_{12}} \right)$$

$$r_{11} = R_{11} \quad r_{12} = R_{12}$$

$$r_2 = 0$$

(1-3)

Differenzverstärker

Er bildet die arithmetische Differenz an den Eingängen anliegenden Spannungen $u_{11} \dots u_{12}$. Die Schaltung kann durch Zuschalten weiterer Widerstände zu einem Summier-Differenzverstärker erweitert werden.

Differenzverstärker

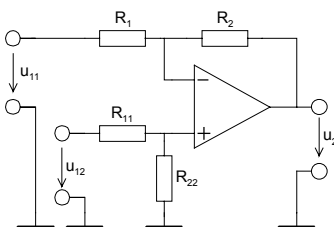


Bild 1-5: Grundschtung des Differenzverstärkers.

$$u_2 = u_{12} \frac{R_{22}(R_1 + R_2)}{R_1(R_{11} + R_{22})} - u_{11} \frac{R_2}{R_1} \quad (1-4)$$

Erster Abgleich: $R_{11} = R_1$ $R_{22} = R_2$

$$u_2 = \frac{R_1}{R_2}(u_{12} - u_{11})$$

Ein Nachteil dieser Schaltung ist die schlechte Abgleichbarkeit der Verstärkung und der niedrige Differenz-Eingangswiderstand. Diese Nachteile weist die Zusammenschaltung zum Instrumentenverstärker nicht auf.

Instrumentenverstärker

Durch Verwendung von drei Operationsverstärkern kann ein echter Differenzverstärker mit sehr hohem Eingangswiderstand konstruiert werden, besonders bei Verwendung von Op-Amp mit FET-Eingangsstufen. Die Verstärkung v_U ist in einem weiten Bereich mit dem Widerstand R einstellbar. Die restlichen Widerstände sollten eng toleriert (1% oder besser) eingesetzt werden. Diverse Hersteller bieten Instrumentenverstärker direkt als IC an.

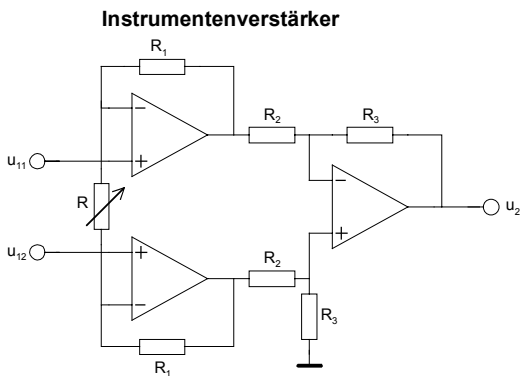


Bild 1-6: Grundschtaltung des Instrumentenverstärkers.

$$v_U = - \left(1 + \frac{2R_1}{R} \right) \frac{R_3}{R_2} (u_{11} - u_{12}) \quad (1-5)$$

Spannungs-Stromwandler

Sie wandeln die Eingangsspannung u_1 in einen proportionalen Strom i_2 . Die Steilheit S ergibt sich aus dem Widerstand R_1 :

Spannungs-Stromwandler

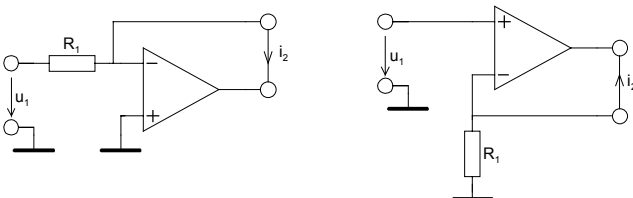


Bild 1-7: Grundschtaltung der Spannungs- und Stromwandler.

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{i_2}{u_1} = \frac{1}{R_1} & S &= \frac{i_2}{u_1} = -\frac{1}{R_1} \\
 r_1 &= R_1 & r_1 &= \infty \\
 r_2 &= \infty & r_2 &= \infty
 \end{aligned} \quad (1-6)$$

Spannungsfolger

Er stellt den Spezialfall des nichtinvertierenden Verstärkers dar mit $v_U=1$. Wegen seines hohen Eingangswiderstandes wird er häufig zur Entkopplung und als Impedanzwandler eingesetzt.

Spannungsfolger

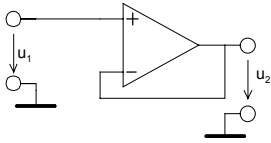


Bild 1-8: Spannungsfolgerstufe indem beim nichtinvertierenden Verstärker $R_2=0$ gesetzt wird.

$v_U = 1$
 $r_1 = \infty$
 $r_2 = 0$

(1-7)

Integrator, Tiefpass 1. Ordnung

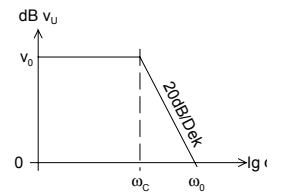
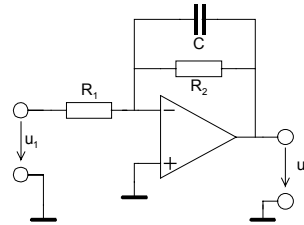
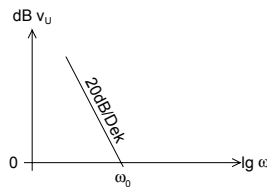
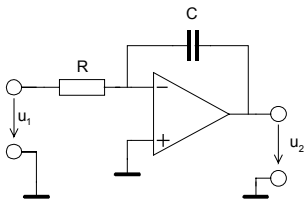


Bild 1-9: Grundsaltungen Integratoren.

$\omega_0 = \frac{1}{R \cdot C}$ $G(s) = \frac{-1}{sRC}$

$r_1 = R$
 $r_2 = 0$

$u_2(t) = \frac{-1}{R \cdot C} \int_0^t u_1(T) dT$

$v_0 = -\frac{R_2}{R_1}$ $G(s) = \frac{-v_0}{1 + sR_2C}$

$\omega_c = \frac{1}{R_2 \cdot C}$ $\omega_0 = \frac{1}{R_1 \cdot C}$

(1-8) (1-9)

$r_1 = R_1$
 $r_2 = 0$

Differenziator, Hochpass 1. Ordnung

Grundsätzlich kann ein Differenziator mit einer einfachen RC-Beschaltung realisiert werden. Durch die in der Praxis endliche Leerlaufverstärkung arbeitet die Schaltung ab ω_c nicht mehr als Differenziator, sondern als Verstärker und aufgrund der internen Kapazitäten ab ω_c sogar als Integrator. Um Rauschen oder Schwingen zu vermeiden, werden zusätzlich R_x und C_x vorgesehen.

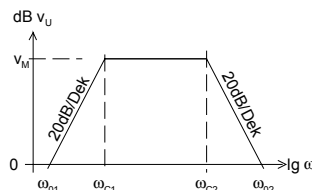
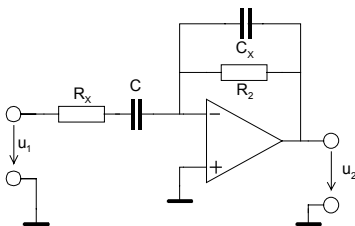


Bild 1-10: Grundsaltung Differenziator.

$$V_M = -\frac{R_2}{R_X}$$

$$G(s) = \frac{-sR_2C}{(1+sR_2C_X)(1+sR_XC)} \stackrel{ideal}{=} -sR_2C \quad (1-10)$$

$$\omega_{01} = \frac{1}{R_2C} \quad \omega_{c1} = \frac{1}{R_XC}$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{R_XC_X} \quad \omega_{c1} = \frac{1}{R_2C_X}$$

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C} + R_X$$

$$r_2 = 0$$

Filterschaltungen höherer Ordnung und Einflüsse vom nichtidealen Operationsverstärker werden in gesonderten Kapitel behandelt.

1.4 Berechnung der Verstärkung – Regeltechnischer Ansatz

Zur Berechnung der Verstärkung ist ein Knoten-/Maschenansatz nach Kirchhoff oder ein regeltechnischer Ansatz möglich. Beide Methoden haben ihre Vor- und Nachteile. Aufgrund des grossen Verbreitungsgrades zeigen wir den regeltechnischen Ansatz anhand von Beispielen.

1.4.1 Notation

Das regeltechnische Schaltbild beschreibt den Signalflussweg und die auf das Signal angewandten Operationen. Wir beschränken uns auf die folgenden Symbole zur Darstellung:

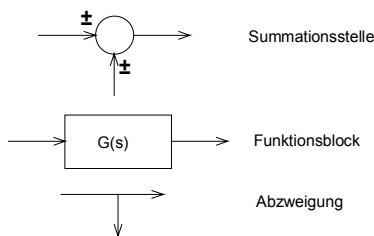


Bild 1-11: Symbole zur Darstellung des Regeltechnisches Ersatzschaltbildes.

Weitere Ausführungen zur Notation und Anwendung entnehme man [DOE89].

1.4.2 Nichtinvertierender Verstärker

Die Verstärkerschaltung wird mit dem Signalflussweg beschrieben:

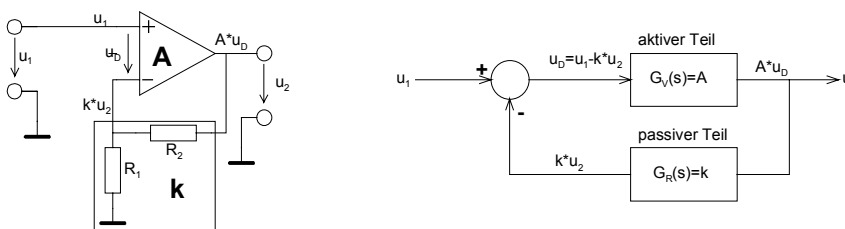


Bild 1-12: Regeltechnisches Ersatzschaltbild eines gegengekoppelten Verstärkers am Beispiel des nichtinvertierenden Verstärkers.

Die Summationsstelle liefert die Differenz dem aktiven Teil zu. Der aktive Teil wird durch den Verstärkerblock mit der Verstärkung V oder A beschrieben. Im Rückführzweig liegt der Block mit dem passiven Teil. Der passive Teil bestimmt, welcher Anteil der Ausgangsspannung dem invertierenden Eingang zugeführt wird.

Die Übertragungsgleichung wird mit dem Ersatzschaltbild:

$$\begin{aligned}
 u_2 &= A \cdot u_D = A(u_1 - k \cdot u_2) \\
 u_2 + k \cdot A \cdot u_2 &= u_2(1 + k \cdot A) = A \cdot u_1 \\
 \Rightarrow v_U &= \frac{u_2}{u_1} = \frac{A}{1 + k \cdot A}
 \end{aligned}
 \tag{1-11}$$

Die resultierende Verstärkung v_U hängt von der Verstärkung A des aktiven Teils und von den Eigenschaften des passiven Teils k ab. Die Verstärkung A verkörpert die Leerlaufverstärkung und ist typischerweise sehr gross $A > 10^5$. Durch Dimensionierung des passiven Teils kann man nun die gewünschte Verstärkung exakt einstellen.

Man erreicht dadurch eine starke Einflussmilderung von Toleranzen, Nichtlinearitäten, Exemplarstreuungen, Alterungseffekte, etc. des aktiven Teiles.

Das passive Netzwerk kann problemlos mit Bauelementen guter Präzision dimensioniert werden. Daher werden die Eigenschaften der Schaltung ausschliesslich durch das Gegenkopplungsnetzwerk bestimmt, wenn die Leerlaufverstärkung genügend gross ist:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} v_U = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A}{1 + k \cdot A} = \frac{1}{k}
 \tag{1-12}$$

Bei den meisten Operationsverstärkern trifft dies nur für sehr tiefe Frequenzen zu. Die Leerlaufverstärkung nimmt ab einigen Hz relativ rasch ab, meist konstant mit -20dB/Dekade .

Aus den obigen Gleichungen kann man einige Begriffe ableiten:

- A : Leerlaufverstärkung. Verstärkung des aktiven Vierpoles oder Operationsverstärkers bei offener Gegenkopplungsschleife. (Open Loop Gain). A ist stark frequenzabhängig.
- v_U : Verstärkung des gegengekoppelten Verstärkers, d.h. Gesamtschaltung. (Closed Loop Gain). Ist immer (wesentlich) kleiner als die Leerlaufverstärkung.
- k : Gegenkopplungsfaktor. Er ist ein Abschwächungsfaktor.
- $1+kA$: Gegenkopplungsgrad. Er bestimmt um welchen Faktor die Verstärkung A reduziert wird.
- A/v_U : Verstärkungsreserve. Sie beschreibt wie viel die Leerlaufverstärkung grösser ist als die Verstärkung der Gesamtschaltung.

Beispiel 1-2(Nichtinvertierender Verstärker mit LM149)

Ein nichtinvertierender Verstärker mit $v_U=500$ soll mit einem Operationsverstärker LM149 realisiert werden.

- a.) Wie gross werden k , Gegenkopplungsgrad und Verstärkungsreserve bei DC?
- b.) Wie gross wird die Verstärkungsreserve bei 10kHz?
- c.) Zeichnen Sie das regeltechnische Ersatzschaltbild mit den berechneten Grössen für DC.
- d.) Um wie viel weicht die Verstärkung bei 10kHz ab?
- e.) Realisieren Sie den passiven Teil mit k möglichst einfach.
- f.) Wie erklären Sie sich die Abweichung, wenn Sie zur Dimensionierung die Formel 2.2 verwenden?

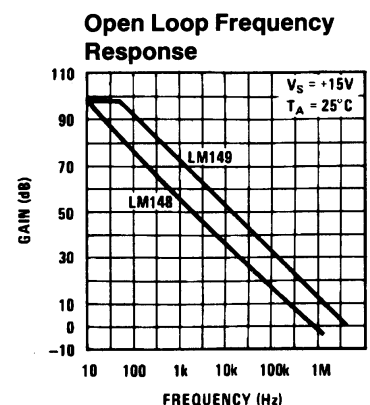


Bild 1-13: Open Loop Gain des Operationsverstärker LM148/149.

Quelle: National Operational Amplifier Databook, National Semiconductor, 1995

Lösung für a.), b.), d.), e.), f.):

$A_{0dB} := 100 \text{ [dB]}$ $A_{10kdB} := 55 \text{ [dB]}$ (aus Datenblatt LM148)
 $v_U := 500$

a.) Gegenkopplungsfaktor, Gegenkopplungsgrad, Verstärkungsreserve bei DC

$A_0 := 10^{\frac{A_{0dB}}{20}}$ $A_0 = 1 \times 10^5$
 $k := \frac{A_0 - v_U}{A_0 \cdot v_U}$ $k = 1.99 \times 10^{-3}$ Gegenkopplungsfaktor
 $1 + k \cdot A_0 = 200$ Gegenkopplungsgrad
 $\frac{A_0}{v_U} = 200$ Verstärkungsreserve

b.) Verstärkungsreserve bei 20kHz

$A_{10k} := 10^{\frac{A_{10kdB}}{20}}$ $A_{10k} = 562.341$
 $\frac{A_{10k}}{v_U} = 1.125$ Verstärkungsreserve

d.) Verstärkung bei 10kHz

$v_{U10k} := \frac{A_{10k}}{1 + k \cdot A_{10k}}$ $v_{U10k} = 265.373$

e.) Dimensionierung der Verstärkerstufe

$R_1 := 1 \cdot 10^3 \text{ [k}\Omega\text{]}$ (Wahl) $v_U = 500$
 $R_2 := \frac{R_1}{k} - R_1$ $R_2 = 5.015 \times 10^5$ Formel abgeleitet aus $k=R_1/(R_1+R_2)$
 $v_U := \frac{A_0 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 \cdot (1 + A_0) + R_2}$ $v_U = 500$ (Exaktes v_U mit Berücksichtigung des A_0)

f.) Differenz zum idealen OP-Amp (R_2 mit $A \rightarrow$ unendlich)

$R_2 := R_1 \cdot (v_U - 1)$ $R_2 = 4.99 \times 10^5$ (Formel abgeleitet aus Skript 2.4)
 $v_U := \frac{A_0 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 \cdot (1 + A_0) + R_2}$ $v_U = 497.512$ (Exaktes v_U mit Berücksichtigung des A_0)

1.4.3 Invertierverstärker

Beim Invertierverstärker gestaltet sich der regeltechnische Ansatz analog. Vor der Summationsstelle ist aber ein zusätzlicher passiver Block G_E einzufügen. Er besagt, welcher Anteil der Eingangsspannung effektiv am invertierenden Eingang anliegt.

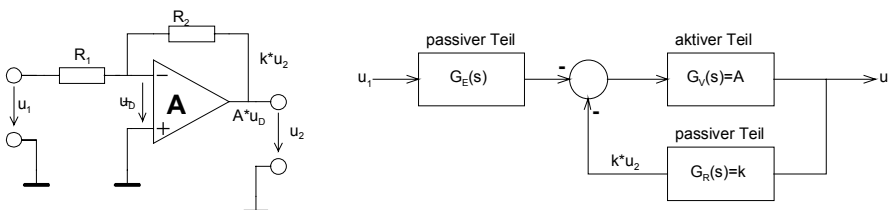


Bild 1-14:
 Regeltechnisches Ersatzschaltbild des Invertierverstärkers mit endlicher Leerlaufverstärkung A.

Die einzelnen Blöcke und die Verstärkung werden somit:

$$G_E(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$G_R(s) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = k$$

$$v_U = \frac{-G_E(s) \cdot A}{1 + kA} = \frac{-\frac{R_2}{R_1 + R_2} A}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} A} = \frac{-R_2 A}{R_1 + R_2 + R_1 A} = \frac{-R_2 A}{R_1(1 + A) + R_2} \stackrel{A \rightarrow \infty}{=} -\frac{R_2}{R_1} \quad (1-13)$$

Wie die Notation mit der komplexen Kreisfrequenz s in den passiven Blöcken hindeutet, können diese durchaus frequenzabhängige Komponenten enthalten.

Beispiel 1-3 (Invertierverstärker mit regeltechnischem Ansatz)

Von folgender Verstärkerstufe ist zu bestimmen:

- a.) Das regeltechnische Ersatzschaltbild mit den ausgewiesenen Funktionen für die passiven Teile
- b.) Ein Op-Amp des Typs 741 wird eingesetzt. Dimensionieren Sie die Verstärkerstufe mit Berücksichtigung von A_o für ein $v_U=100$ und ein $r_I=10k\Omega$. Zur Realisation sind keine Widerstände grösser als $100k\Omega$ zu benutzen.
- c.) Wie b.) aber für idealen Op-Amp.

Lösung:

a.) Um den Ansprüchen in c.) zu genügen wird der passive Teil mit k nicht über einen einfachen Seriewiderstand, sondern mit einem T-Glied realisiert. Dadurch können grosse Widerstandswerte für R_2 vermieden werden.

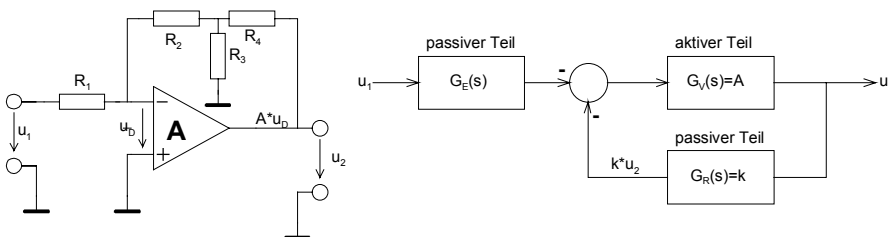


Bild 1-15: Regeltechnisches Ersatzschaltbild des Invertierverstärkers gemäss Schaltbild. Durch das T-Glied im Rückführzweig lassen sich grosse Widerstandswerte vermeiden.

$$G_E(s) = \frac{R_2 + R_3 \parallel R_4}{R_1 + R_2 + R_3 \parallel R_4} = \frac{R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}$$

$$G_R(s) = \frac{R_1 R_3}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2 + R_3 \parallel R_4)} = \frac{R_1 R_3}{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}$$

$$v_U = \frac{-G_E(s)A}{1 + G_R(s)A} = \frac{-A \frac{R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}}{1 + A \frac{R_1 R_3}{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}} = \frac{-A(R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4)}{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4 + A R_1 R_3} \quad (1-14)$$

$$v_U \stackrel{A \rightarrow \infty}{=} -\frac{R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}{R_1 R_3} \quad (1-15)$$

$$v_U \stackrel{\substack{A \rightarrow \infty \\ R_4 \rightarrow 0}}{=} -\frac{R_2}{R_1} \quad (1-16)$$

Bei (1-16) erkennt man die Formel für den gewöhnlichen Invertierverstärker mit idealem Op-Amp nach (1-1).

1.5 Nichtidealer Operationsverstärker

Die folgenden Kapitel beschreiben die wesentlichen störenden Einflussgrößen des realen Operationsverstärkers und des rechnerischen Umgangs.

Im Gegensatz zum idealen Operationsverstärker untersuchen wir daher die für die Praxis relevanten Themen:

- Offsetprobleme, d.h DC-Spannungsversatz am Ausgang
- Endliche und vor allem frequenzabhängige Leerlaufverstärkung
- Ein- und Ausgangswiderstände
- Maximale Anstiegsgeschwindigkeiten der Ausgangssignale

1.5.1 DC Offset und Temperatureinflüsse

Sie stellen hauptsächlich in DC-Verstärkern ein Problem dar. Durch geeignete schaltungstechnische Massnahmen können Offsetfehler minimiert oder kompensiert werden. Bei idealen Operationsverstärkern geht man davon aus, dass bei einer Differenzeingangsspannung $u_D=0V$ immer eine Ausgangsspannung $u_A=0V$ erscheint.

Durch den Arbeitspunkt der Eingangsstufe notwendigen Eingangsstroms und Restströme erscheint immer am Ausgang ein mehr oder weniger grosser Spannungsversatz, die Ausgangsoffsetspannung. Dieser grundsätzlich unerwünschte Effekt ist zudem temperatur- und speisespannungsabhängig.

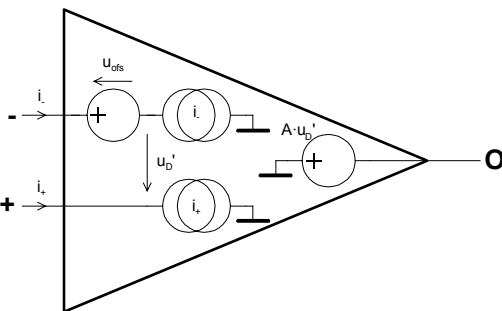


Bild 1-16:
 Ersatzschaltbild für die Betrachtung der Offseleinflüsse beim
 Operationsverstärker nach [WAI75].

Das Offsetverhalten des Operationsverstärkers wird mit den folgenden Parameter beschrieben und in den Herstellerdatenblättern ausgewiesen:

u_{ofs} Differenzial-DC-Offsetspannung, üblicherweise Eingangsoffsetspannung genannt. Sie verkörpert die am Eingang anzulegende Gleichspannung damit am Ausgang eine Spannung von $u_2=0V$ erreicht wird, wenn die Eingänge sonst direkt an Masse liegen.

i_{Boas+} / i_{Bias-} Eingangs-Biasströme. Sie verkörpern die Ströme zur Arbeitspunkteinstellung der Eingangsstufen so, dass ohne Eingangsoffsetspannung am Ausgang eine Spannung von $u_A=0V$ erscheint.

i_{ofs} Eingangsoffsetstrom. Differenz der beiden Eingangs-Biasströme

$$i_{ofs} = i_{Bias-} - i_{Bias+}$$

Im Regelfall werden Maximalwerte spezifiziert, da eine Offsetbetrachtung generell Worst-Case Rechnung ist. Im Regelfall sind i_{Bias+} und i_{Bias-} etwa gleich gross und haben dieselbe Polarität. Die Drift der Ströme bei Temperatur- und Speisespannungsschwankungen erfolgt miteinander.

Typische Werte für Offsetkenngrößen sind gemäss [WAI75] und [BBR98]:

Technologie	Monolithisch mit Bipolar-Eingang	Monolithisch mit FET Eingang	Monolithisch mit FET Eingang (High Class)
Offsetspannung u_{ofs}	$\pm 5\text{mV}$	$\pm 3.5\text{mV}$	$\pm 0.5\text{mV}$
Eingangs-Biasstrom (i_{Bias+} oder i_{Bias-})	50nA^*	-10nA^*	$\pm 75\text{fA}$
Eingangs-Offsetstrom i_{ofs}	$\pm 5\text{nA}$	$\pm 5\text{pA}$	$\pm 30\text{fA}$
Temperaturdrift von u_{ofs}	$\pm 5\mu\text{V}/^\circ\text{C}$	$\pm 10\mu\text{V}/^\circ\text{C}$	$\pm 0.3\mu\text{V}/^\circ\text{C}$
Temperaturdrift von i_{Bias+}, i_{Bias-}	$\pm 0.5\text{nA}/^\circ\text{C}$	$*2$ pro 10°C	$*2$ pro 10°C
Temperaturdrift von i_{ofs}	$\pm 0.05\text{nA}/^\circ\text{C}$	$*2$ pro 10°C	$*2$ pro 10°C

* Oft haben i_1, i_2 bekannte Polarität, aber das Vorzeichen von i_{ofs} ist undefiniert.

Durch den Offset entsteht ein Versatz der Transferkennlinie wie das folgende Beispiel zeigt:

Gemäss Datenblatt fliesst ein typischer Eingangsoffsetstrom von $i_{Bias} = \pm 300\text{nA}$ bei $U_{CC} = 15\text{V}$ und 25°C Umgebungstemperatur

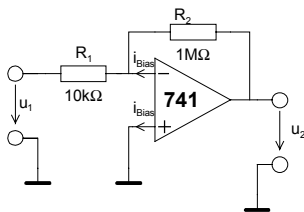


Bild 1-17: Beschaltung eines einfachen Invertierverstärkers zur Betrachtung der Ausgangsoffsetsspannung .

Durch den Biasstrom entsteht am Widerstand R_1 ein Spannungsabfall von ca. 3mV und erscheint um den Faktor v_U als Offsetspannung am Ausgang.

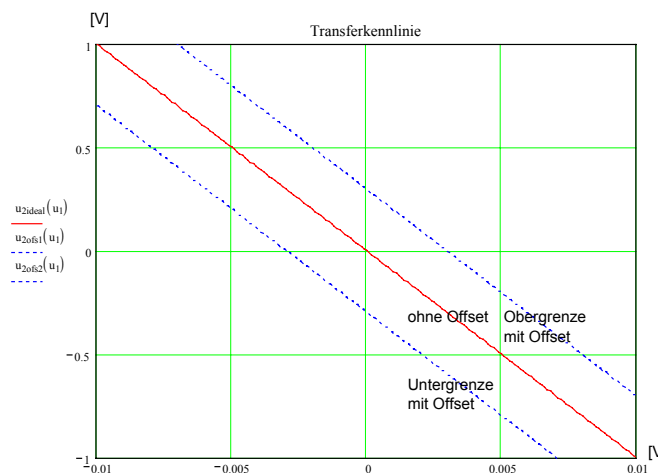


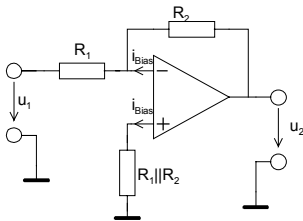
Bild 1-18: Transferkennlinie des Invertierverstärkers nach Bild 1.4 mit $v_U = -100$. Durch Offseteinfluss wird die Kennlinie verschoben.

Hinweis: Die in dieser Schaltung gezeigte Rückführung mit $1\text{M}\Omega$ ist in der Praxis für diesen Op-Amp etwas gross. Sie dient nur zum Aufzeigen der Problematik.

1.5.2 Offset-Kompensation

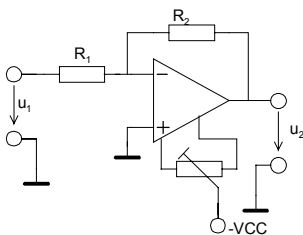
Wird in einer Schaltung DC-Stabilität gefordert, muss im Regelfall schaltungstechnisch eine Offsetkompensation vorgesehen werden. Bei der Inbetriebnahme erfolgt der Abgleich so, dass bei Betriebsbedingungen (z.B. kurzgeschlossenem Eingang) am Ausgang eine Spannung von 0V herrscht. Neben der Auswahl eines offsetminimierten Op-Amp sind drei schaltungstechnische Methoden gebräuchlich:

1. Offsetverminderung durch **Symmetrierwiderstand** R_3 . Die etwa gleich grossen Biasströme am Eingang erzeugen an beiden Eingängen denselben Spannungsabfall gegenüber Masse.



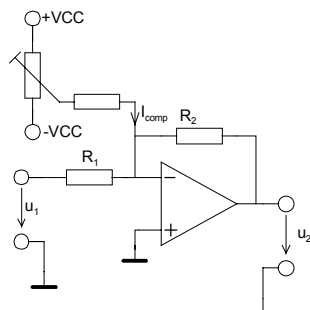
Es verbleibt hierbei noch der Einfluss der Unsymmetrie der beiden Biasströme, d.h. der Eingangsoffsetstrom. Grundsätzlich könnte man $R_1 \parallel R_2$ abgleichbar machen, es wird aber zu Gunsten Methode 2. kaum praktiziert.

2. Vor allem Einfach-Operationsverstärker verfügen direkt über eine **Offsetabgleichmöglichkeit**. Diese ist nach Herstellervorschrift zu beschalten. Bei Zweifach- oder Vierfach-Op-Amps ist meist keine direkte Abgleichmöglichkeit vorgesehen.



Je nach Typ erfolgt die Beschaltung über ein, zwei oder drei Anschlüsse. Die Einstellung erfolgt häufig über ein Trimpotentiometer.

3. Op-Amp ohne Anschluss zum Offsetabgleich können durch definiertes Einspeisen eines **Kompensationsstromes** i_{comp} am Eingang abgeglichen werden.



Häufig werden Methoden 1 und 2 kombiniert, da ein besseres Driftverhalten erreicht wird. Weiter ist zu beachten, dass alle Offsetgrößen ausgeprägt temperatur- und etwas alterungsabhängig sind.

Beispiel 1-4(Offsetabgleich beim Op-Amp OP-07)

Ein invertierender Verstärker mit $r_1=10k\Omega$ und $v_U=-10$ soll nach Herstellervorschrift offsetkompensiert werden.

PMI OP-07 ULTRA-LOW OFFSET VOLTAGE OPERATIONAL AMPLIFIER

ELECTRICAL CHARACTERISTICS at $V_S = \pm 15V, -55^\circ C \leq T_A \leq +125^\circ C$, unless otherwise noted.

PARAMETER	SYMBOL	CONDITIONS	OP-07A			OP-07			UNITS
			MIN	TYP	MAX	MIN	TYP	MAX	
Input Offset Voltage	V_{OS}	(Note 1)	—	25	60	—	60	200	μV
Average Input Offset Voltage Drift Without External Trim	TCV_{OS}	(Note 2)	—	0.2	0.6	—	0.3	1.3	$\mu V/^\circ C$
With External Trim	TCV_{OSn}	$R_P = 20k\Omega$ (Note 3)	—	0.2	0.6	—	0.3	1.3	$\mu V/^\circ C$
Input Offset Current	I_{OS}		—	0.8	4	—	1.2	5.6	nA
Average Input Offset Current Drift	TCI_{OS}	(Note 2)	—	5	25	—	8	50	$pA/^\circ C$
Input Bias Current	I_B		—	± 1	± 4	—	± 2	± 6	nA
Average Input Bias Current Drift	TCI_B	(Note 2)	—	8	25	—	13	50	$pA/^\circ C$
Input Voltage Range	IVR		± 13	± 13.5	—	± 13	± 13.5	—	V
Common-Mode Rejection Ratio	CMRR	$V_{CM} = \pm 13V$	106	123	—	106	123	—	dB
Power Supply Rejection Ratio	PSRR	$V_S = \pm 3V$ to $\pm 18V$	—	5	20	—	5	20	$\mu V/V$
Large-Signal Voltage Gain	A_{VO}	$R_L \geq 2k\Omega, V_O = \pm 10V$	200	400	—	150	400	—	V/mV
Output Voltage Swing	V_O	$R_L \geq 2k\Omega$	± 12	± 12.6	—	± 12	± 12.6	—	V

- NOTES:**
- OP-07A grade V_{OS} is measured approximately one minute after application of power. For all other grades V_{OS} is measured approximately 0.5 seconds after application of power.
 - Sample tested.
 - Guaranteed by design.

OPTIONAL OFFSET NULLING CIRCUIT

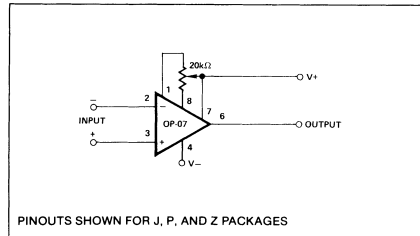


Bild 1-19:
Auszug Datenblatt OP-07.

Quelle: Analog IC Databook, PMI (Precision Monolithic IC) 1988, S. 5-65.

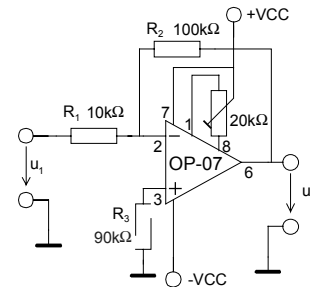
Lösung:

$$r_1 := 10 \cdot 10^3 \quad [\Omega] \quad v_U := -10 \quad (\text{Vorgaben})$$

$$R_1 := r_1 \quad R_1 = 1 \times 10^4 \quad [\Omega] \quad (\text{nach Gl. 1-1})$$

$$R_2 := -v_U \cdot R_1 \quad R_2 = 1 \times 10^5 \quad [\Omega]$$

$$R_3 := \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad R_3 = 9.091 \times 10^3 \quad [\Omega]$$



1.5.3 Kleinsignalmodell des realen Operationsverstärkers

Das nachfolgende Modell beschreibt die wesentlichen Aspekte des realen Operationsverstärkers im linearen Betrieb. Linear heisst hier Kleinsignalbetrieb, alle Parameter werden linearisiert dargestellt. Daher erfüllt das System eine lineare Differenzialgleichung.

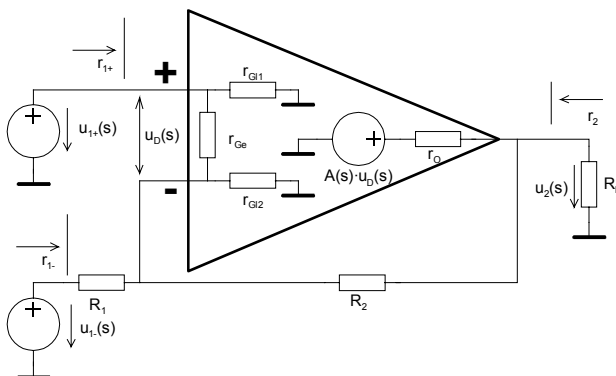


Bild 1-20:
Kleinsignalmodell eines beschalteten Operationsverstärkers.

Die nichtidealen Einflussgrößen sind:

1. Open-Loop Gain, Leerlaufverstärkung $A(s)$
2. Open-Loop Ausgangsimpedanz r_o
3. Gegentakt- (Differenzial-) Eingangsimpedanz r_G
4. Gleichtakt- (Common-Mode) Eingangsimpedanz r_G

Sie werden als Kenngrößen des Operationsverstärkers im Datenblatt des Herstellers aufgeführt und beziehen sich immer auf den Betrieb in offener Schleife.

Die Impedanzen werden meist als reelle Widerstände betrachtet, obwohl bei höheren Frequenzen auch kapazitive Einflüsse zum Tragen kommen. Die Gleichtakteingangswiderstände r_{G1}, r_{G2} sind gleich gross und typischerweise sehr hoch, meist $> 10^8 \Omega$. Der Gegentakteingangswiderstand ist generell kleiner. Bei Bipolar-Eingangsstufen liegt er in der Größenordnung von $10^6 \Omega$. Bei guten FET-Eingangsstufen kommt r_{Ge} in die Größenordnung von r_{G1} .

Der Innenwiderstand der frequenzabhängigen spannungsgesteuerten Spannungsquelle $A(s) \cdot u_D$ verkörpert r_o . Er liegt im Bereich von ca. 10Ω bis einigen 100Ω .

Die Leerlaufverstärkung A ist ausgeprägt frequenzabhängig. Sie wird normalerweise in dB spezifiziert. Praxiswerte liegen im Bereich 50-120dB je nach Typ und Technologie.

Die Grenzfrequenz f_c liegt meist bei einigen Hz. Nachher fällt die Amplitude asymptotisch mit 20dB/Dekade. Die Transitfrequenz zeigt wo Einheitsverstärkung erreicht wird, typischerweise im MHz-Bereich. Das System verkörpert das Verhalten eines Tiefpass 1. Ordnung. Daher ergibt sich der gezeigte Amplituden- und Phasengang.

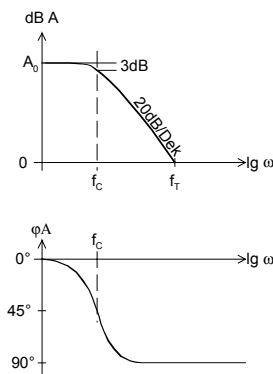


Bild 1-21:
 Verlauf des Open-Loop Gain eines
 Operationsverstärkers.

Das Verstärkungs-Bandbreite Produkt G_{BW} ist daher für Bandbreiten $\geq f_c$ immer konstant. Es ist eine wesentliche Kenngröße des Operationsverstärkers:

$$G_{BW} = A \cdot f = const \quad (f \geq f_c) \quad (1-17)$$

Beispiel 1-5 (Verstärkungs-Bandbreite Produkt)

Ein Operationsverstärker hat eine DC-Leerlaufverstärkung von 120dB und eine Transitfrequenz 2MHz. Man bestimme:

- a.) G_{BW} Produkt
- b.) -3dB Grenzfrequenz
- b.) Leerlaufverstärkung bei 20kHz.

Lösung:

$$A_{0dB} := 120 \quad [\text{dB}] \quad f_T := 2 \cdot 10^6 \quad [\text{Hz}]$$

a.) $A_{fT} := 1 \quad (A \text{ ist bei } f_T = 1)$

$$G_{BW} := A_{fT} \cdot f_T \quad G_{BW} = 2 \times 10^6 \quad [\text{Hz}]$$

b.) $A_0 := 10^{\frac{A_{0dB}}{20}} \quad A_0 = 1 \times 10^6$

$$f_C := \frac{f_T}{A_0} \quad f_C = 2 \quad [\text{Hz}]$$

c.) $f := 20 \cdot 10^3 \quad [\text{Hz}]$

$$A := \frac{G_{BW}}{f} \quad A = 100$$

1.5.4 Ein- und Ausgangswiderstände

Durch Gegenkopplung werden die Ein- und Ausgangswiderstände stark beeinflusst. Da die Leerlaufverstärkung ausgeprägt frequenzabhängig ist, sind auch die Ein- und Ausgangswiderstände der Schaltung frequenzabhängig. Dieses Kapitel soll zeigen wie die Unterschiede zum idealen Operationsverstärker sind.

Wir betrachten dazu den nichtinvertierenden Verstärker, indem wir in Bild 1-20 die Quelle $u_{1+} = 0$ setzen.

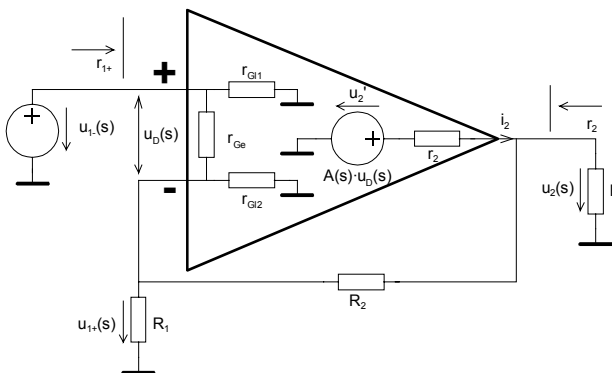


Bild 1-22:
Kleinsignalmodell des nichtinvertierenden Verstärkers zur Untersuchung der Ein- und Ausgangswiderstände.

Die frequenzabhängige Leerlaufverstärkung (Open Loop Gain) $A = \frac{u_2}{u_D}$ wird:

$$k = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$u_2' = A_0 (u_{1+} - k \cdot u_2)$$

$$u_2 = u_2' \frac{R_L \parallel (R_1 + R_2)}{R_L \parallel (R_1 + R_2) + r_o} = u_2' \frac{1}{1 + \frac{r_o}{R_L} + \frac{r_o}{R_1 + R_2}}$$

$$\Rightarrow A = A_0 \frac{1}{1 + \frac{r_o}{R_L} + \frac{r_o}{R_1 + R_2}} \quad (1-18)$$

Durch die Beschaltung sinkt die Leerlaufverstärkung A um den Faktor $\frac{1}{1 + \frac{r_o}{R_L} + \frac{r_o}{R_1 + R_2}}$.

Der Ausgangswiderstand des beschalteten Operationsverstärkers ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 u_2' &= A_0(u_{1+} - k \cdot u_2) = u_2 + i_2 \cdot r_O \\
 u_2 &= \frac{A_0 \cdot u_{1+} - i_2 \cdot r_O}{A_0 \cdot k + 1} \\
 \Rightarrow r_2 &= -\frac{du_2}{di_2} = \frac{r_O}{A_0 \cdot k + 1} \stackrel{A \cdot k \gg 1}{\approx} \frac{r_O}{A_0 \cdot k}
 \end{aligned}
 \tag{1-19}$$

Der Eingangswiderstand des beschalteten nichtinvertierenden Operationsverstärkers wird:

$$\begin{aligned}
 A' &= A_0 \frac{1}{1 + \frac{r_O}{R_L} + \frac{r_O}{R_1 + R_2}} & k' &= \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{r_{Ge}} + \frac{R_2}{r_{Gl}}} \\
 i_{1+} &= u_{1+} \left(\frac{1}{2r_{Gl}} + \frac{1 + \frac{R_2}{r_{Ge}} + \frac{R_2}{r_{Gl}}}{\left(1 + \frac{1}{A'k'}\right) \cdot A' \cdot r_{Ge}} \right) \\
 r_{1+} &= \frac{2(A'k'+1) \cdot A' \cdot r_{Ge} \cdot r_{Gl} \cdot k'}{(A'k'+1) \cdot A' \cdot r_{Ge} \cdot r_{Gl} \cdot k' + 2r_{Gl} \cdot A'k'}
 \end{aligned}
 \tag{1-20}$$

$$r_{1+} = \frac{2 \cdot A_0 \cdot r_{Ge} \cdot r_{Gl} \cdot k}{A_0 \cdot r_{Ge} \cdot r_{Gl} \cdot k + 2r_{Gl}} \quad (k' \rightarrow k, A' \rightarrow A_0, A' \cdot k' \gg 1)
 \tag{1-21}$$

Eine analoge Betrachtung liefert den Eingangswiderstand für den Invertierverstärker:

$$r_{1-} = \frac{A' \cdot R_1^2 \left(1 + \frac{1}{A' \cdot k'}\right)}{\left(1 + \frac{1}{A' \cdot k'}\right) A' \cdot R_1 + R_2} \quad (A' \text{ ist als pos. Wert einzusetzen})
 \tag{1-22}$$

$$r_{1-} = R_1 \quad (A' \cdot k' \gg 1)$$

$$r_2 = \frac{r_O}{1 + A' \cdot k'} \quad (A' \cdot k' \gg 1)
 \tag{1-23}$$

Beispiel 1-6: (Ein- und Ausgangswiderstände beim realen Operationsverstärker)

Ein Verstärker mit $vU=100$ wird mit einem Op-Amp des Typs uA777 realisiert. Aus dem Datenblatt und der Dimensionierung sind die folgenden Grössen bekannt:

$$\begin{aligned}
 R_1 &:= 1 \cdot 10^3 \text{ } [\Omega] & R_2 &:= 100 \cdot 10^3 \text{ } [\Omega] & R_L &:= 10 \cdot 10^3 \text{ } [\Omega] \\
 r_{Ge} &:= 2 \cdot 10^6 \text{ } [\Omega] & r_{Gl} &:= 100 \cdot r_{Ge} \\
 r_O &:= 100 \text{ } [\Omega] \\
 A_{dB} &:= 105 \text{ } [dB]
 \end{aligned}$$

- a.) Man vergleiche den die Grössen A_0-A' , $k-k'$.
- b.) Man bestimme die Ein- und Ausgangswiderstände r_1, r_2 .
- c.) Man bestimme die Betriebsverstärkung mit den Grössen A', k' aus a.).

Lösung:

a.) Vergleich A_0 -A, k-k':

$$k := \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad k = 9.901 \times 10^{-3}$$

$$k' := \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{r_{Ge}} + \frac{R_2}{r_{Gl}}} \quad k' = 9.896 \times 10^{-3}$$

$$A_0 := 10^{\frac{A_{0dB}}{20}} \quad A_0 = 1.778 \times 10^5$$

$$A' := A_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{r_O}{R_L} + \frac{r_O}{R_1 + R_2}} \quad A' = 1.759 \times 10^5$$

b.) Ein- und Ausgangswiderstände:

$$r_1 := \frac{A' \cdot R_1^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{A' \cdot k'}\right)}{A' \cdot R_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{A' \cdot k'}\right) + R_2} \quad r_1 = 999.432 \quad [\Omega]$$

$$r_2 := \frac{r_O}{1 + A' \cdot k'} \quad r_2 = 0.057 \quad [\Omega]$$

c.) Verstärkung:

$$v_U := \frac{(k' - 1) \cdot A'}{1 + k' \cdot A'} \quad v_U = -99.993 \quad []$$

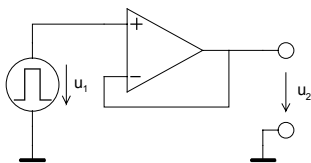
Man erkennt aus den Resultaten, dass die Abweichung gegenüber den Formeln für den idealen Op-Amp vernachlässigbar klein ist. Zur Dimensionierung werden daher meist die Formeln benutzt, die einem idealen Op-Amp zu Grunde liegen.

Bei höheren Frequenzen muss aber mindestens das frequenzabhängige A berücksichtigt werden.

1.5.5 Maximale Anstiegsgeschwindigkeit der Ausgangssignale (Slew-Rate)

Während das Verstärkungs-Bandbreitenprodukt als Kleinsignalgrösse die maximal mögliche Verstärkung bei einer gegebenen Frequenz definiert, beschreibt die Slew-Rate als Grosssignalgrösse die maximal mögliche Anstiegsgeschwindigkeit des Ausgangssignals.

Die Slew-Rate wird in der Regel bei Einheitsverstärkung im Datenblatt ausgewiesen und ist wie folgt definiert:



$$SR = \left| \frac{du_2(t)}{dt} \right|_{\max} \quad \left[\frac{V}{s} \right] \quad (1-24)$$

Bild 1-23:

Standardschaltung zur Messung der Slew-Rate. Sie wird immer bei Einheitsverstärkung gemessen.
(Ev. schreibt der Hersteller im Datenblatt eine andere Messschaltung vor.)

Normalerweise unterscheiden sich die positiven und negativen Anstiegsgeschwindigkeiten geringfügig. Bei Messungen wird dann der kleinere Wert benutzt.

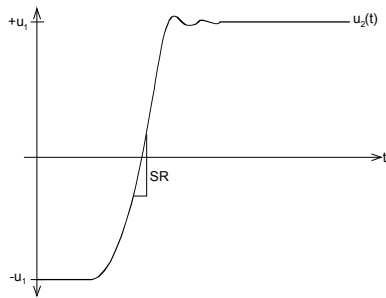


Bild 1-24:
 Typisches Ausgangssignal bei Slew-Rate Messung.

Die Messung erfolgt mit einem Rechteckimpuls genügender Flankensteilheit. Im Ausgangssignal bestimmt man die Zone der maximalen Steilheit und daraus die maximale Anstiegsgeschwindigkeit. Die Aussteuerung erfolgt nach der Messschaltung des Herstellers, meist in der Grössenordnung von $u_1 = \pm 10V$.

Beispiel 1-7: (Slew-Rate Messung beim OpAmp 1458S)

Man bestimme die maximale Anstiegsgeschwindigkeit des Ausgangssignals aufgrund folgender Messung:

MC1558S LARGE-SIGNAL TRANSIENT RESPONSE
 (Inverting Mode)

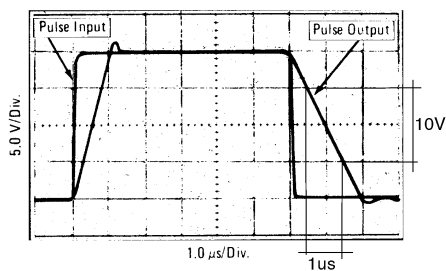


Bild 1-25:
 Slew-Rate Messung am OpAmp MC1458S.

Bild: Motorola Semiconductor Library Vol. 6, 1976

Lösung:

$$SR = \left| \frac{du_{out}}{dt} \right| \approx \frac{10V}{1\mu s} = 10 \left[\frac{V}{\mu s} \right] \quad (1-25)$$

Dieser Wert entspricht auch demjenigen, der im Datenblatt ausgewiesen wird.

1.5.6 Maximale Ausgangsspannung

Bei DC und tiefen Frequenzen liegt die maximale Ausgangsamplitude (Output Swing) etwas unter der Speisespannung. Bei ca. 90% der maximal möglichen Aussteuerung beginnt aber bereits eine merkliche Begrenzung des Signals.

Aus der Einschränkung durch die Slew-Rate folgt, dass bei höheren Frequenzen keine grossen Ausgangsamplituden (Output Swing) erreicht werden können.

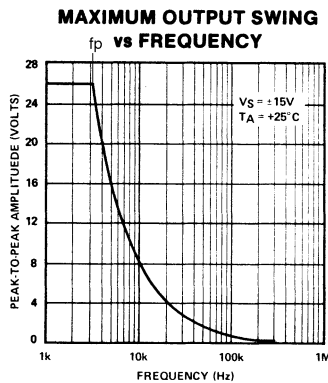


Bild 1-26:
Typischer Verlauf der maximal möglichen Ausgangsspannung (Output Swing) in Funktion der Frequenz.

Bild: OP-08, PMI Databook 1988

Neben dem Verstärkungs-Bandbreitenprodukt stellt die Slew-Rate SR eine der grossen frequenzmässigen Einschränkungen dar.

Die maximal mögliche Ausgangsamplitude bei gegebener Slew-Rate SR wird:

$$u_2 = \hat{u}_2 \sin \omega t \quad \rightarrow \quad SR = \left| \frac{du_2(t)}{dt} \right|_{\max} = \hat{u}_2 \cdot \omega \quad \rightarrow \quad \hat{u}_2(\omega) = \frac{SR}{\omega}$$

$$\rightarrow \hat{u}_2(f) = \frac{SR}{2\pi f} \quad (1-26)$$

Der Schnittpunkt der Hyperbelfunktion mit der maximalen Amplitude für tiefe Frequenzen wird Grosssignal-Bandbreite f_p (Full Power Bandwidth) genannt (siehe auch Bild 1-26).

Beispiel 1-8: (Grosssignal-Bandbreite)

Gegeben sei ein Operationsverstärker mit einer Slew-Rate $SR=10^6\text{V/s}$ und einer maximalen Ausgangsspannung von $\pm 10\text{V}$ bei tiefen Frequenzen.

- Man bestimme die Grosssignal-Bandbreite f_p .
- Bei welcher Frequenz beträgt die maximale Ausgangsspannung $2V_s$?
(Beispiel aus [WAI75], S. 120.)

Lösung:

$$a.) \quad f_p = \frac{SR}{2\pi \cdot \hat{u}_2} = \frac{10^6}{2\pi \cdot 10} = 15.915\text{kHz}$$

b.) analog a.), aber $u_2 = 2V_s$:

$$f_p = \frac{SR}{2\pi \cdot \hat{u}_2} = \frac{10^6}{2\pi \cdot 2} = 79.577\text{kHz}$$

1.5.7 Einschwingzeit (Settling Time)

Bei der Sprungantwort in Bild 1-25 ist ein kleiner Einschwingvorgang zu beobachten. Er lässt sich durch den Ausregelmechanismus der Schaltung erklären. Die Einschwingzeit definiert die Zeit von 50% des Signalanstieges am Eingang bis der Fehler am Ausgangssignal auf einen bestimmten Wert abgeklungen ist, meist 0.1%.

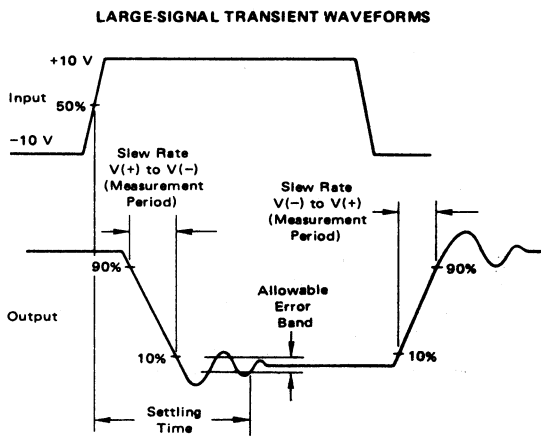


Bild 1-27:
 Verlauf und Definition der Einschwingzeit (Settling Time).

Bild: Motorola Semiconductor Library, Vol. 6, 1976.

Die Einschwingzeit muss vor allem bei getakteten Anwendungen beachtet werden, z.B. D/A-Wandler, Sample&Hold-Schaltungen.

1.5.8 Overload recovery

Wird der maximale Ausgangsstrom eines Operationsverstärkers überschritten, erfolgt eine Begrenzung des Ausgangsstromes. Diese wirkt als Kurzschlussicherung, so dass der Operationsverstärker durch Überlast nicht zerstört werden kann.

Die Kurzschlussicherung erfolgt generell durch Strombegrenzung in der Ausgangsstufe. In Bild 1-28 werden über den Spannungsabfall an den Emitterwiderständen R_6, R_7 werden die Transistoren Q2 im Begrenzungsfall durchgeschaltet. So entsteht ein Regelmechanismus, der den Emitterstrom auf die

Grösse $I_{E_{max}} \approx \frac{0.6}{R_6}$ begrenzt. Klein-OpAmp haben Maximalströme in der Grössenordnung vom ca.

20mA.

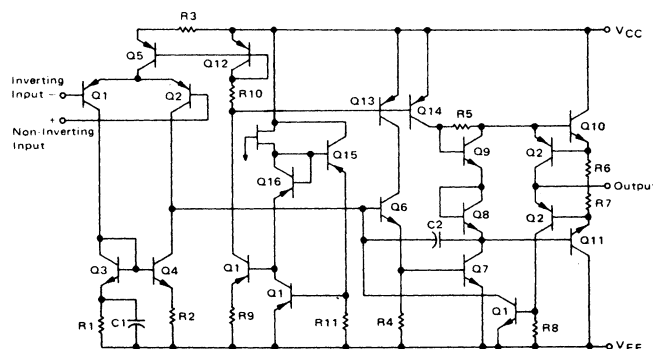


Bild 1-28:
 Vereinfachtes Detailschaltbild des OpAmp MC4558. Die Transistoren Q2 und die Widerstände R_6, R_7 sind für die Ausgangsstrombegrenzung verantwortlich.

Bild: Motorola Semiconductor Library, Vol. 6, 1976.

Bei Wegnahme der Überlast erfolgt bei den meisten OpAmp keine sofortige Rückkehr in den normalen Zustand. Weiter erfolgt durch die Überlastung eine Erwärmung, die verschiedene Parameter ungünstig beeinflusst. Manche Hersteller weisen hierzu eine Zeitverzögerung (overload recovery) aus, die bei 100% Überlast gemessen wird.

1.5.9 Rauschen

Rauscheinflüsse können vor allem bei Verstärkung kleiner Signale ein Problem darstellen. Durch Auswahl geeigneter, rauscharmer Bausteine und Impedanzanpassungen kann viel verbessert werden.

Die Hersteller spezifizieren das Rauschverhalten der Bausteine nicht einheitlich. Häufig werden die äquivalente Rauschströme und -Spannungen spezifiziert. Manche zeigen auch die spektrale Dichte-Verteilung:

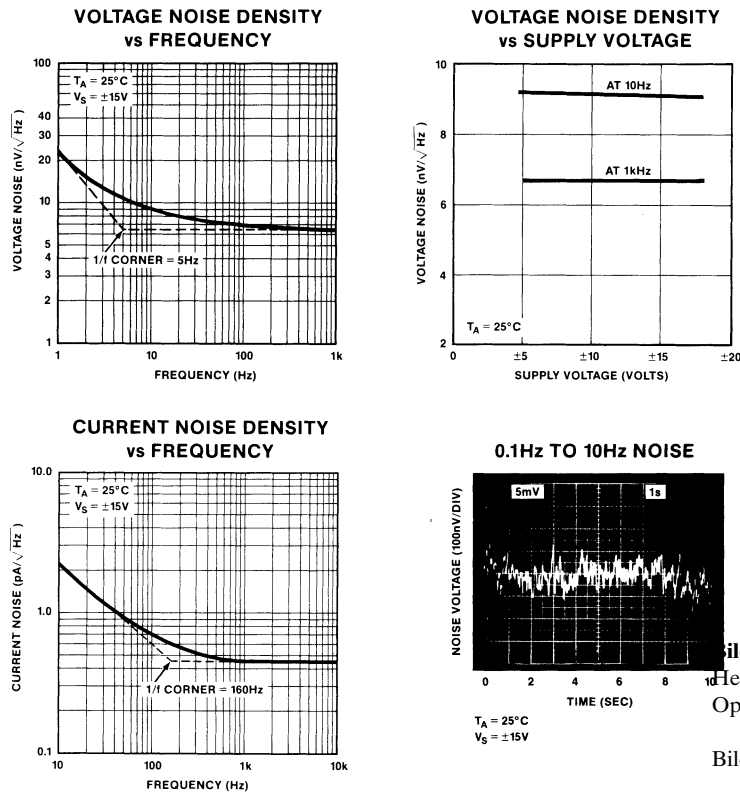


Bild 1-29: Herstellerbeschreibungen zum Rauschverhalten der Operationsverstärker.

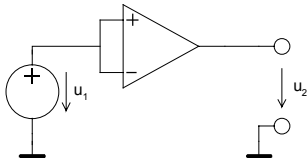
Bild: PMI.

- Man unterscheidet im Spektrum zwei wesentliche Bereiche:
- niederfrequent (rosa) 1/f-Rauschen im Bereich 0.01Hz..10Hz
 - mittelfrequent (weisses) Rauschen im Bereich 10Hz..10kHz

Betrachtungen zum Rauschverhalten allgemein sind Teil des Stoffes ME II und werden deshalb hier nicht weitergeführt. Detaillierte Ausführungen sind in [DEN88] nachzulesen.

1.5.10 Gleichtaktunterdrückung (Common Mode Rejection)

Idealerweise verstärkt ein Operationsverstärker ausschliesslich die Differenzspannung an den Eingängen. In der Realität ist aber eine, wenn auch kleine, Gleichtaktverstärkung CMG zu beobachten:



$$CMG = \frac{u_2}{u_1}$$

Bild 1-30: Messschaltung und Definition für Gleichtaktverstärkung. (1-27)

In den Datenblätter wird meist die Gleichtaktunterdrückung $CMRR$ (Common Mode Rejection Ratio) ausgewiesen, meist in dB. Sie wird direkt aus der DC-Leerlaufverstärkung A_0 und der Gleichtaktverstärkung CMR bestimmt:

$$CMRR = \left| \frac{A_0}{CMG} \right| \quad (1-28)$$

Wir untersuchen nun den Einfluss auf das Verstärkerverhalten durch Einführen der Modelle:

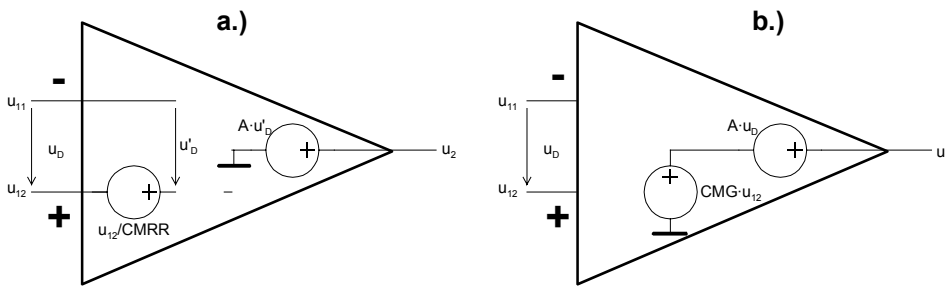
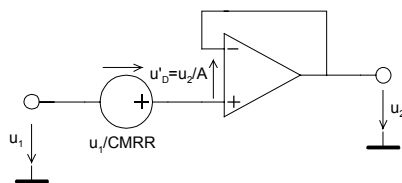


Bild 1-31: Äquivalente Modelle zur Beschreibung der Gleichakteinflüsse nach [WAI75].
 a.) Einflussmodellierung am Eingang.
 b.) Einflussmodellierung am Ausgang

In Bild a.) verkörpert $\frac{u_{12}}{CMRR}$ die Gleichakteingangsspannung. Unter Anwendung von Modell a.) finden wir für den Spannungsfolger:

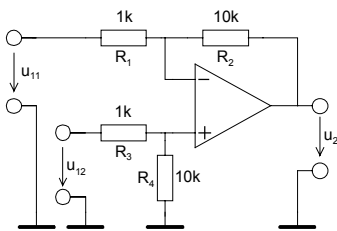


$$u_1 = \frac{u_1}{CMRR} + \frac{u_2}{A} + u_2$$

$$v_U = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1 - \frac{1}{CMRR}}{1 + \frac{1}{A}} \quad (1-29)$$

Beispiel 1-9: (Gleichtaktunterdrückung)

Der folgende Differenzverstärker sei bis auf die Gleichtaktunterdrückung von 90dB als ideal anzunehmen. (Beispiel nach [WUP94], S. 82.)



- Wie gross wird die Gleichtakteingangsspannung?
- Man bestimme formal die Ausgangsspannung.
- Wie gross wird die Ausgangsspannung und der Fehler am Ausgang, wenn $u_{11}=10.0\text{V}$ und $u_{12}=10.01\text{V}$ beträgt?

Lösung:

$$a.) \quad \frac{u_{12} \cdot R_4}{R_3 + R_4} \frac{1}{CMRR}$$

$$b.) \quad u_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \left(1 + \frac{1}{CMRR} \right) \frac{u_{12} \cdot R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1} \cdot u_{11}$$

$$= u_{12} \cdot \underbrace{\frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4}}_{\text{gewünschtes Signal}} - \frac{R_2}{R_1} \cdot u_{11} + \underbrace{\frac{u_{12}}{CMRR} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2}}_{\text{unerwünschtes Signal}}$$

c.)

Vorgaben:

$$R_1 := 1 \cdot 10^3 \quad [\Omega] \quad R_2 := 10 \cdot 10^3 \quad [\Omega] \quad R_3 := 1 \cdot 10^3 \quad [\Omega] \quad R_4 := 10 \cdot 10^3 \quad [\Omega]$$

$$CMRR_{\text{dB}} := 90 \quad [\text{dB}] \quad u_{11} := 10.01 \quad [\text{V}] \quad u_{12} := 10.00 \quad [\text{V}]$$

Berechnungen:

$$CMRR := 10^{\frac{CMRR_{\text{dB}}}{20}} \quad CMRR = 3.162 \times 10^4$$

$$u_2 := u_{12} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} - u_{11} \cdot \frac{R_2}{R_1} + \frac{u_{12}}{CMRR} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} \quad u_2 = -0.097 \quad [\text{V}]$$

$$u_{\text{err}} := \frac{u_{12}}{CMRR} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} \quad u_{\text{err}} = 3.162 \times 10^{-3} \quad [\text{V}]$$

$$u_{2\text{ideal}} := u_{12} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} - u_{11} \cdot \frac{R_2}{R_1} \quad u_{2\text{ideal}} = -0.1 \quad [\text{V}]$$

1.6 Nichtlineare Schaltungen

Darunter fallen alle Anwendungen, die einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsspannung zeigen:

Gleichrichter
Begrenzer
Logarithmierer, Exponentialverstärker
Komparatoren, Schmitt-Trigger
Generatoren

Wie für den linearen Fall, lassen sich auch hier mit Operationsverstärker teilweise (fast) ideale Übertragungscharakteristiken erreichen.

1.6.1 Aktive Gleichrichter

Sie werden zur präzisen Gleichrichtung kleiner Signale benutzt. Je nach Schaltung ist Halbwellen- oder Vollwellengleichrichtung möglich.

Der aktive Gleichrichter verfügt über eine ideale Gleichrichterkennlinie, d.h. die Gleichrichtung erfolgt mit linearer Kennlinie ab 0V.

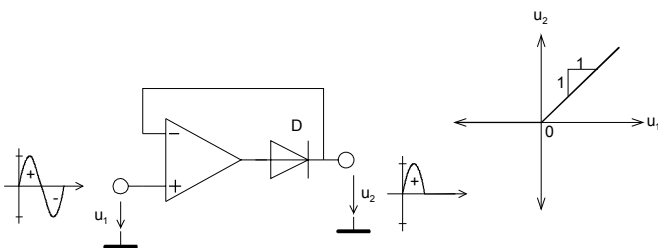


Bild 1-32:
Einfacher aktiver Halbwellengleichrichter.
Charakteristisch ist die saubere lineare Kennlinie ab 0V.

Für ein gutes Gleichrichterverhalten ist ein schnelles Umschalten der Diode in den Nulldurchgängen erforderlich. Dies wird massgeblich durch die Slew-Rate des Operationsverstärkers beeinflusst. Ebenfalls spielt die in der Durchlassphase eingespeicherte Ladung der Diode und die Erholzeit des Operationsverstärkers eine Rolle.

Mit den hier gezeigten Gleichrichterschaltungen lassen sich mit handelsüblichen Operationsverstärkern problemlos Wechselspannungen im Bereich 50mV..10V ohne zusätzliche Kompensationen bis einige kHz gleichrichten, bei einem Fehler < 1%.

1.6.2 Einweggleichrichter

Die einfache Schaltung gemäss Bild 1-32 wird praktisch nie benutzt, da der Operationsverstärker für $u_1 < 0$ in die Begrenzung läuft. Durch Zuschalten einer weiteren Diode wird die Begrenzung vermieden und man erhält einen brauchbaren Präzisionsgleichrichter:

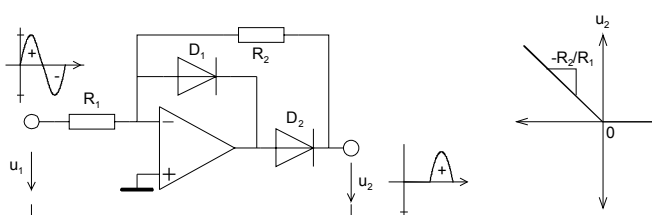


Bild 1-33:
Aktiver Präzisions-Einweggleichrichter.

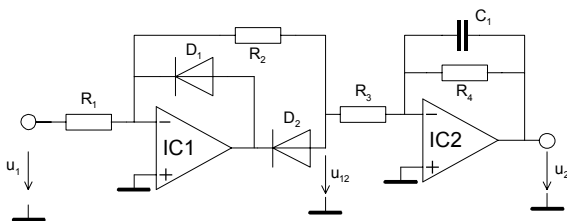
Für $u_1 > 0V$ ist D_1 leitend und D_2 gesperrt. Daher liegt der Ausgang über R_2 an der virtuellen Masse. Es ergeben sich die Ersatzschaltbilder:



Bild 1-34:
 Ersatzschaltbilder für das statische Durchlass- und Sperrverhalten des aktiven Einweggleichrichter nach Bild 1-33.

Beispiel 1-1: (Aktiver Einweggleichrichter)

Man realisiere AC-Voltmeter zur Messung des Effektivwertes von reinen Sinusspannungen bis $10V_{eff}$. Hierzu ist folgende Schaltung zu dimensionieren: (Idee aus [WAI75], S.162)



Die Ausgangsstufe mit Tiefpasscharakteristik wirkt als Glättungsstufe mit niedriger Ausgangsimpedanz. Die Grenzfrequenz ist auf 0.5Hz zu legen. Die Speisespannung ist $\pm 10V$.

Lösung:

Die am Gleichrichtereingang zu erwartende Spannung beträgt maximal:

$$\hat{u}_1 \leq \sqrt{2} \cdot \pm u_1 = \pm \sqrt{2} \cdot 10V = \pm 14.14V$$

Damit der Operationsverstärker IC1 nicht übersteuert wird, muss sichergestellt sein, dass

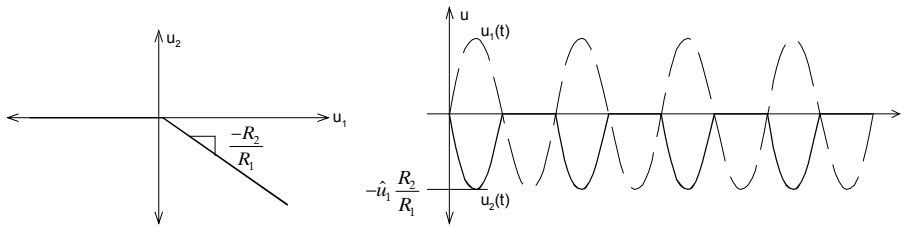
$$\hat{u}_1 \frac{R_2}{R_1} \leq U_{Omax} - U_F$$

wobei U_{Omax} die maximale Ausgangsspannung des Operationsverstärkers IC1 ist und U_F die Vorwärtsspannung der Diode. Wir erfüllen diese Bedingung mit der Wahl von

$$R_1 = 10k\Omega \quad R_2 = 5k\Omega .$$

Der Mittelwert der Ausgangsspannung u_{12} am Gleichrichter wird:

$$\overline{u_{12}} = \hat{u}_1 \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\pi} = \frac{\hat{u}_1}{2\pi}$$



Die Verstärkung der zweiten Stufe mit IC2 berücksichtigt den Formfaktor und die kompensiert die Dämpfung der ersten Stufe:

$$\frac{\overline{u_2}}{u_{12}} = \frac{\hat{u}_1}{\frac{\hat{u}_1}{2\pi}} = \pi\sqrt{2} = 4.44$$

$$R_3 = \frac{R_4}{\pi\sqrt{2}} = 0.225 \cdot R_4$$

Mit der geforderten Grenzfrequenz von 0.5Hz werden die Widerstände:

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_4 C} = 0.5\text{Hz} \quad \text{Wahl: } C = 2\mu\text{F}$$

$$R_4 = \frac{1}{2\pi f_c C} = \frac{1}{2\pi \cdot 0.5 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 159.154\text{k}\Omega$$

$$R_3 = 0.225 \cdot R_4 = 35.809\text{k}\Omega$$

1.6.3 Zweiweggleichrichter

Durch Zuschalten eines Summierers kann aus der Grundschaltung für Einweggleichrichtung nach Bild 1-33 ein aktiver Zweiweggleichrichter konstruiert werden:

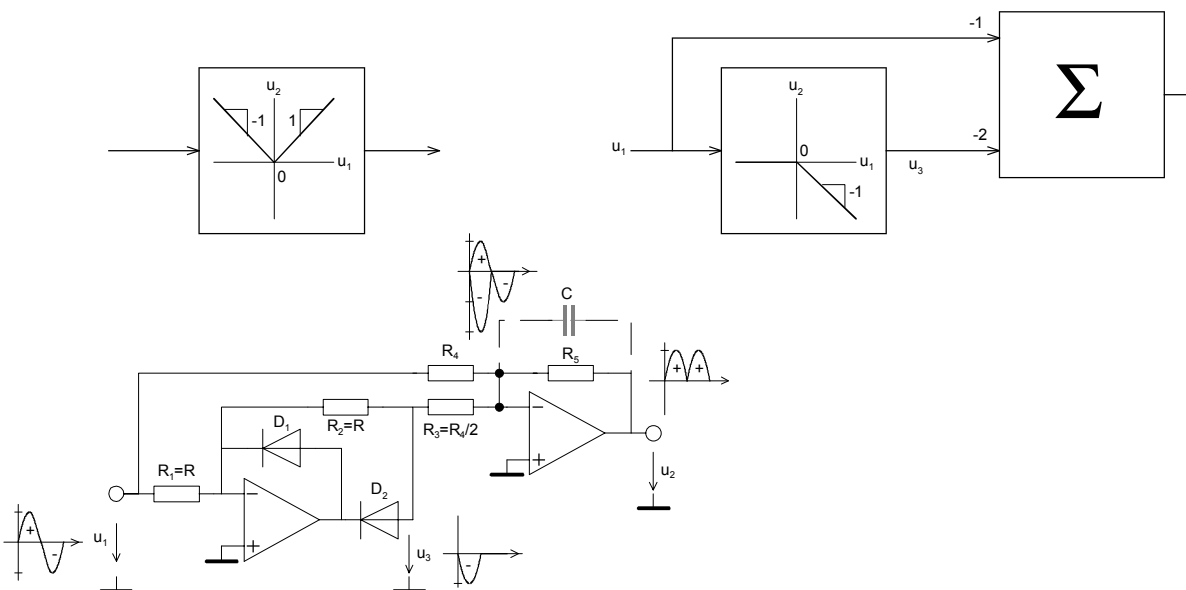


Bild 1-35:
Block- und Detailschaltbilder des aktiven Zweiweggleichrichters.

Eine weitere Schaltung zur Zweiggleichrichtung ergibt sich aus dem Einweggleichrichter, der jeweils negative und positive Halbwelle gleichrichtet und die Differenz bildet:

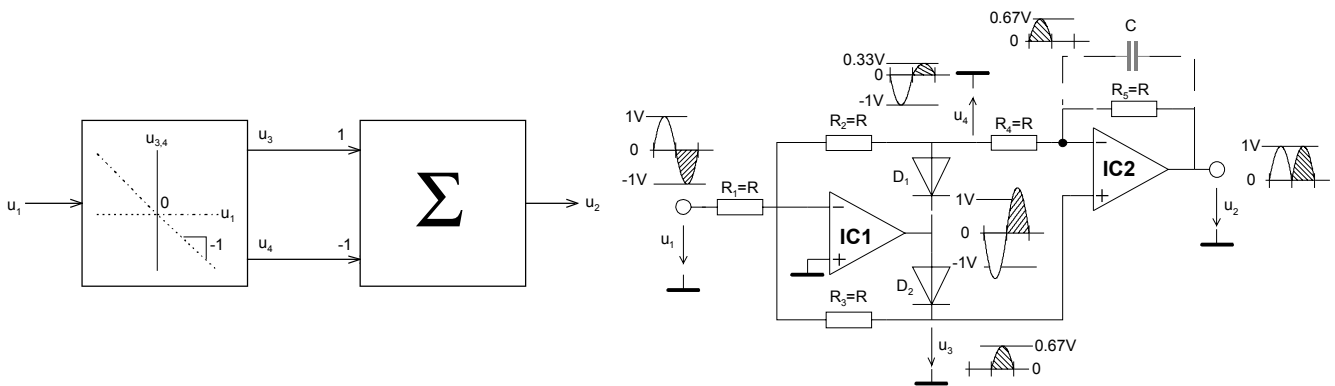


Bild 1-36:
 Andere Realisation eines aktiven Zweiggleichrichters mit typischen Verläufen der Spannungen.
 Quelle: [WDL91]

IC1 arbeitet solange als invertierender Verstärker mit $v_{U+} = -\frac{R_2}{R_1}$, $v_{U-} = -\frac{R_3}{R_1}$ wie eine der beiden

Dioden in Durchlassrichtung arbeitet. Ist am Ausgang von IC1 die Spannung kleiner als die Vorwärtsspannung der Dioden regelt der OpAmp nach, so dass bereits bei kleinsten Eingangsspannungen (ideal 0V) eine der beiden Dioden im Durchlass ist. Die Dioden-Flussspannung wird etwa um den Faktor A reduziert:

$$u'_F = \frac{u_F}{A} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} u'_F = 0V \quad (1-30)$$

Daher werden auch kleinste Eingangsspannungen präzise gleichgerichtet. Sinkt bei höheren Frequenzen die Leerlaufverstärkung ab, ist bei kleineren Eingangsspannungen eine Nichtlinearität wegen des ansteigenden u'_F zu beobachten.

1.6.4 Probleme bei Gleichrichtern mit realen Operationsverstärkern

Aktive Gleichrichterschaltung für höhere Frequenzen stellen hohe Anforderung an die Slew Rate und GBW des Operationsverstärkers.

Sinkt bei höheren Frequenzen die Leerlaufverstärkung ab, ist bei kleineren Eingangsspannungen eine Nichtlinearität wegen des ansteigenden u'_F zu beobachten. Dies ist vor allem bei kleinen Eingangsspannungen ein Problem.

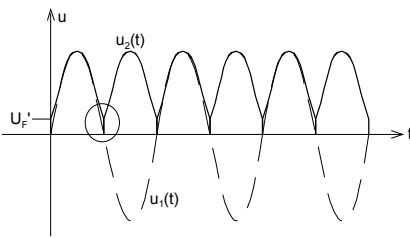


Bild 1-37:

Verzerrung der Ausgangsspannung bei höheren Frequenzen aufgrund der absinkenden, endlichen Leerlaufverstärkung.

Bei zu kleiner Slew Rate hingegen vermag der Operationsverstärker dem Signal nicht zu folgen. Die Ausgangsspannung erscheint in diesem Bereich verzerrt. Bei Sinussignalen ist dies in den Nulldurchgängen zu beobachten. Bei grösseren Eingangsamplituden wird auch der Maximalpegel nicht mehr erreicht.

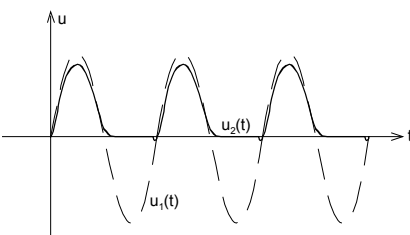


Bild 1-38:

Verzerrung der Ausgangsspannung bei grossen Amplituden und Frequenzen aufgrund zu kleiner Slew Rate des Operationsverstärkers.

Durch geschickte Wahl der Widerstände und Last kann das Verhalten erheblich verbessert werden.

1.6.5 Begrenzerschaltungen

Sie dienen zur amplitudenmässigen Begrenzung von Signalen. Eine Zusammenstellung der Funktionsblöcke mit möglichen Realisationen und Kennlinien:

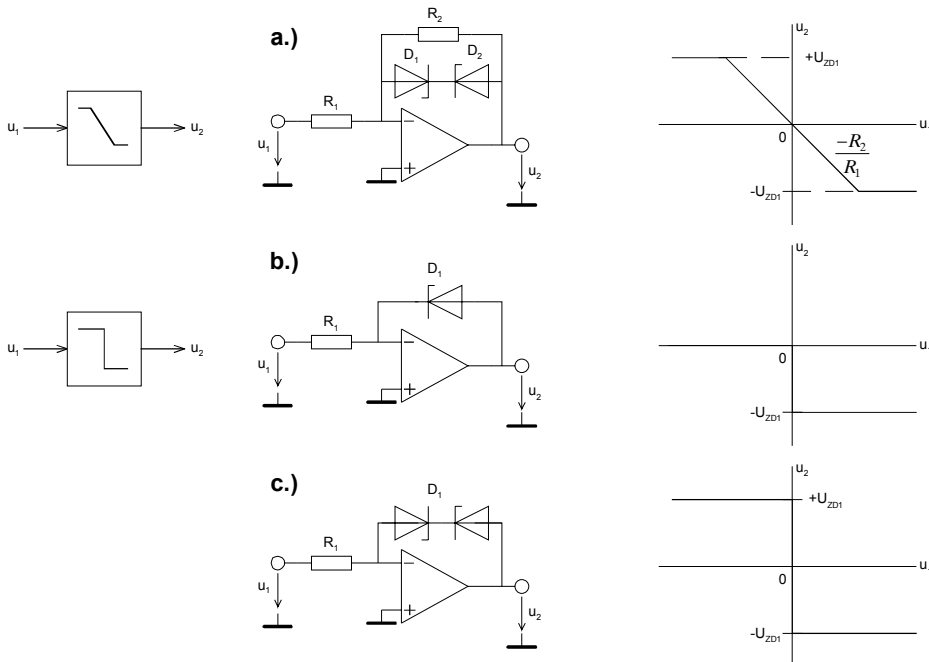


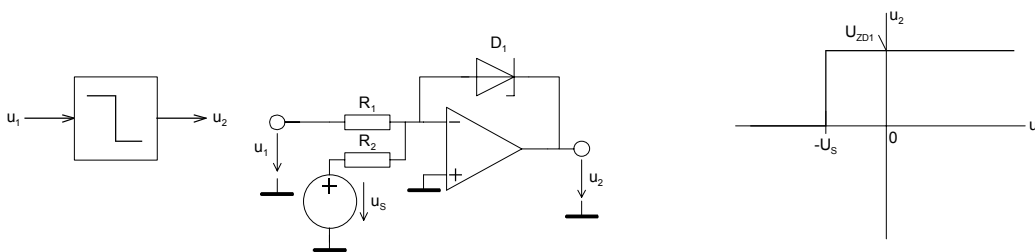
Bild 1-39:

Begrenzer Grundsaltungen.
a.) Verstärker mit definierter symmetrischer Begrenzung.
b.), c.) Nullspannungskomparatoren
Quelle: [WAI75]

Die Schaltung a.) ist der klassische Verstärker mit Begrenzung. In der Kennlinie sind drei Betriebszustände zu unterscheiden:

1. D_1 und D_2 gesperrt. Der Verstärker arbeitet im linearen Bereich und es gilt $u_2 = \frac{-R_2}{R_1} u_1$.
2. D_1 ist im Durchlass, D_2 ist gesperrt. Durch zu grosse positive Eingangsspannung ist die Stufe negativer Begrenzung gelaufen und es gilt $u_2 = u_{ZD1}$.
3. D_2 ist im Durchlass, D_1 ist gesperrt. Durch zu grosse negative Eingangsspannung ist die Stufe positiver Begrenzung gelaufen und es gilt $u_2 = u_{ZD2}$.

Die Schaltungen b.) und c.) stellen Nullspannungskomparatoren dar, die eine Digitalisierung des Signals um einen Schwellwert von 0 bewirken. Variable Schwellwerte sind durch Zuführen einer Vergleichsspannung u_s möglich:



Für die Ausgangsspannung gilt dann:

$$u_2 = \begin{cases} u_Z & u_1 \leq -u_s \\ 0 & u_1 > -u_s \end{cases}$$

Bild 1-40:
 Begrenzer Grundschtung mit variablem Schwellwert.
 Quelle: [WAI75]

Alle Begrenzerschaltungen sind auch nichtinvertierend realisierbar.

Festzuhalten bleibt, dass eine hochwertige, d.h. präzise und schnelle Begrenzung mit den gezeigten Schaltungen schlecht realisierbar ist. Dazu werden aufwendigere Schaltungen benötigt. Wir verweisen hierzu auf die einschlägige Literatur, z.B. [WAI75], [TOB71].

1.6.6 Komparatorschaltungen

Komparatorschaltungen nehmen am Ausgang genau zwei Zustände an, je nachdem ob der Eingang grösser oder kleiner als eine Referenzspannung ist. Sie werden grundsätzlich nicht mit Gegenkopplung betrieben. Daher kann die Differenzspannung an den Eingängen beliebige Werte annehmen.

Komparatoren können zwar mit handelsüblichen Operationsverstärkern realisiert werden, jedoch wird man meist spezielle Komparatoren einsetzen. Sie haben im Gegensatz zu normalen OpAmps einen Open Collector Ausgang, der ein besseres Anstiegsverhalten für digitale Signale zeigt.

Die einfachste Form eines invertierenden Komparators ist:

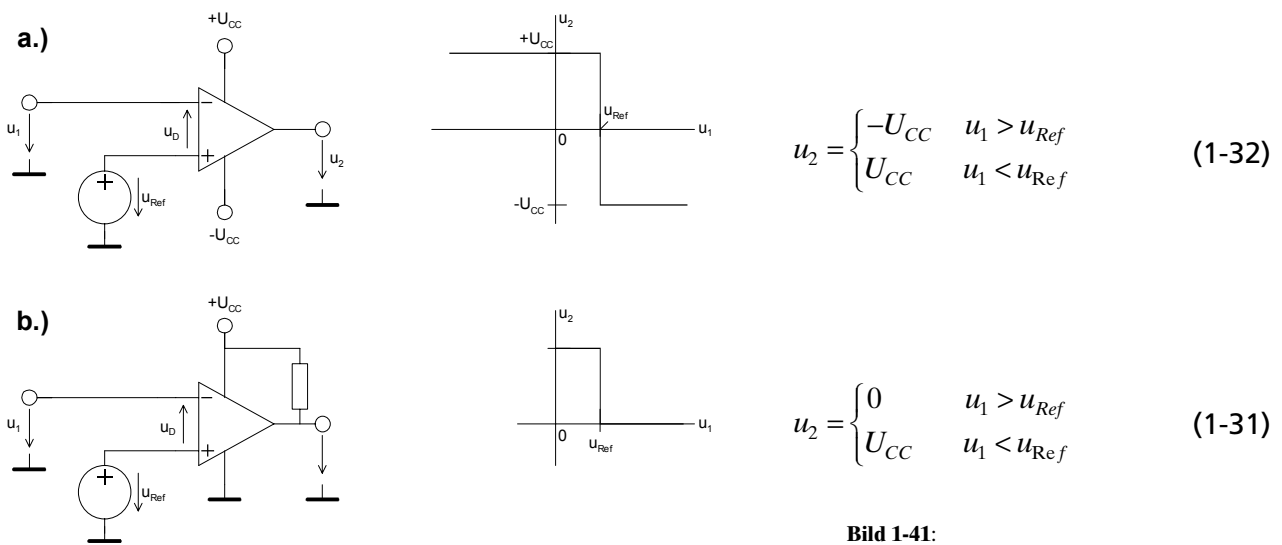


Bild 1-41:
Invertierende Komparatorschaltungen.
a.) Realisation mit Operationsverstärker
b.) Realisation mit Open-Collector Komparator IC

Für den nichtinvertierenden Komparator gelten analoge Zusammenhänge.

Wird ein realer Operationsverstärker oder Komparator eingesetzt, erfolgt kein schlagartiger Wechsel der Ausgangsspannung, da die endliche Leerlaufverstärkung eine minimale Differenzspannung u_d um das Ausgangssignal in der Grösse $\pm U_{CC}$ zu erzeugen.

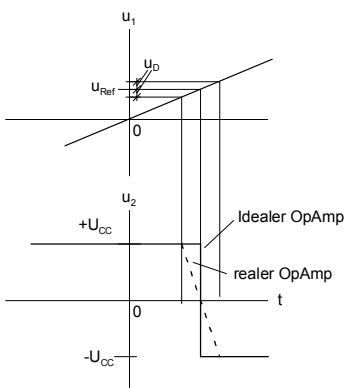


Bild 1-42:
Umschaltvorgang bei Komparator mit idealem und realen Operationsverstärker oder Komparator- IC.
Quelle: [WDL91]

Diese minimale Differenzspannung u_d ist vor allem bei langsamen Änderungen störend, wenn z.B. ein Relais angesteuert wird. In diesem Fall erfolgt ein langsames Anziehen oder Abfallen was unerwünscht ist. Bei sehr schnellen Eingangssignalen wirkt die Slew Rate zusätzlich einschränkend.

Die minimale Umschaltzeit für einen Komparator mit einem Operationsverstärker 741 ($SR=0.5V/us$) bei $\pm 15V$ Versorgungsspannung wird daher:

$$t_{min} = \frac{(u_{2max} - u_{2min})}{SR} = \frac{15 - (-15)}{0.5} \left[\frac{V \cdot us}{V} \right] = 60us \quad (1-33)$$

Da bei den Komparatorschaltungen in Bild 1-41 die Eingänge nicht auf gleichen Pegel liegen, muss der Operationsverstärker (oder Komparator) eine hohe Gleichtaktunterdrückung aufweisen, besonders wenn kleine Differenzen präzise erfasst werden sollen.

Weniger hohe Anforderungen an die Gleichtaktunterdrückung stellt eine Komparatorschaltung mit einem nicht gegengekoppelten Summierer:

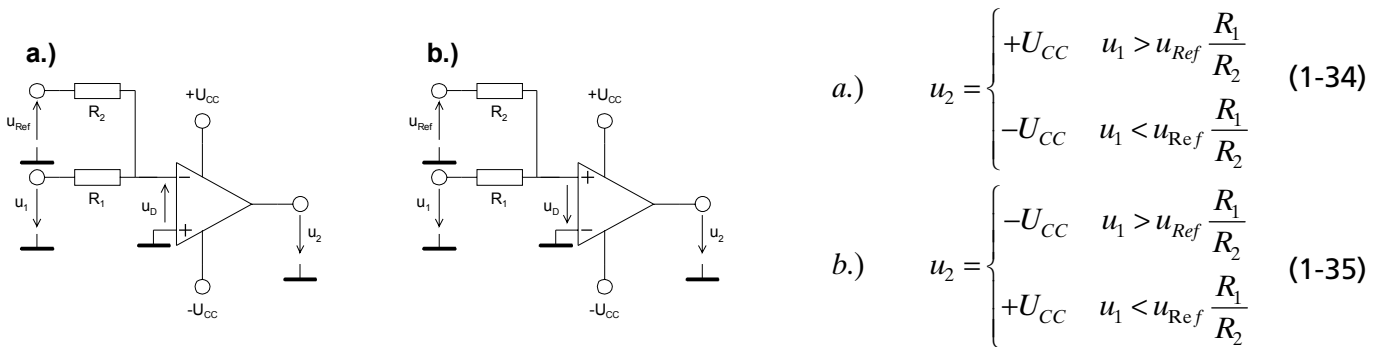


Bild 1-43:
 Alternative Komparatorschaltungen, welche weniger hohe Anforderungen an die Gleichtaktunterdrückung stellen.
 Quelle: [WDL91]

Der Umschaltunkt wird bei $u_d=0V$ erreicht. Da bei diesen Schaltungen der Vergleich immer bei $0V$ stattfindet, wird keine hohe Anforderung an die Gleichtaktunterdrückung des OpAmp gestellt.

Nachteile der Schaltung sind der kleinere Eingangswiderstand, sowie die Verlangsamung der Eingangsspannung um den Faktor $\frac{R_2}{R_1 + R_2}$ durch den Spannungsteiler R_1-R_2 . Dies hat beim realen Operationsverstärker die Folge, dass man noch einen flacheren Übergang hat.

In der Nähe des Umschaltunktes sind Komparatoren ausserordentlich empfindlich auf Störungen. Sie können beim Umschalten daher mehrfach oszillieren. Eine Schmitt-Triggerschaltung verhindert durch Hysterese ein Oszillieren und hat vom Ausgangssignal unabhängige Umschaltgeschwindigkeit.

1.6.7 Beispiele für Komparatoren

Nachfolgend eine Zusammenstellung gängiger Komparatorbausteine nach [TIE99], S.661, und Anderen:

Typ	Hersteller	Anzahl/IC	Ausgang	Leistung/Komp.	Schaltzeit
CMP401	Analog Dev.	4	TTL	40mW	23ns
AD9687	Analog Dev.	2	ECL	210mW	2ns
AD9698	Analog Dev.	2	TTL	300mW	6ns
LT1394	Lin. Tech	1	TTL	70mW	7ns
LT1443	Lin. Tech	4	CMOS	6uW	12us
LT1671	Lin. Tech	1	CMOS	3uW	60us
LT1720	Lin. Tech	2	TTL	12mW	4ns
MAX944	Maxim	4	CMOS	3mW	75ns
MAX964	Maxim	4	CMOS	40mW	4ns
MAX970	Maxim	4	CMOS	20uW	10us
MAX978	Maxim	4	CMOS	3mW	20ns
MAX993	Maxim	4	CMOS	100uW	300ns
MAX996	Maxim	4	CMOS	400uW	120ns
LM311	National	1	TTL	70mW	200ns
LP311	National	1	TTL	1mW	4us
LM393	National	2	TTL	8mW	600ns
LMC6764	National	4	CMOS	50uW	4us
TL710	Texas Instr.	1	TTL	90mW	40ns
TLC372	Texas Instr.	2	CMOS	2mW	200ns
SPC9689	Signal Proc.	2	ECL	350mW	0.6ns

1.6.8 Schmitt-Trigger

Schmitt-Trigger sind Komparatorschaltungen mit Mitkopplung. Sie werden hauptsächlich zur Impulsformung und als Rechteckwandler eingesetzt.

Im Gegensatz zur konventionellen Komparatorschaltung wird die Referenzspannung nicht fest vorgegeben, sondern aus der Ausgangsspannung über einen Spannungsteiler gewonnen. Dadurch entsteht die Mitkopplung.

Sie haben daher zwei Umschaltunkte u_{S+} , u_{S-} . Die Differenz zwischen den Umschaltunkten nennt man Hysterese u_H .

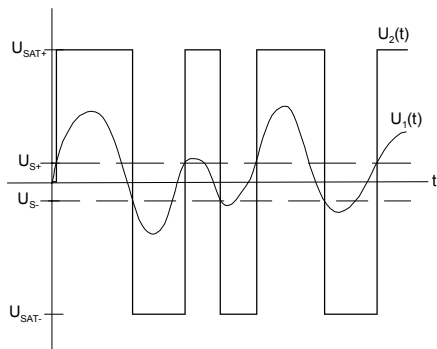


Bild 1-44:
Spannungsverläufe beim Schmitt-Trigger (nichtinvertierend).
Der Bereich von u_{S+} - u_{S-} ist die Hysterese.
 $u_1(t)$: Eingangssignal
 $u_2(t)$: Ausgangssignal

Durch die Hysterese kann ein Schmitt-Trigger auch bei langsamen Umschaltvorgängen nicht oszillieren und hat eine von der Eingangsspannung unabhängige Umschaltzeit.

1.6.8.1 Nullpunktsymmetrische Schmitt-Trigger

Bei ihnen liegen die Umschaltunkte symmetrisch zur Nulllinie. Die Grundschaltungen und Formeln des nullpunktsymmetrischen Schmitt-Triggers:

a.)

$$u_{S-} = U_{sat+} \frac{-R_1}{R_2}$$

$$u_{S+} = U_{sat-} \frac{-R_1}{R_2}$$

$$u_H = \frac{R_1}{R_2} (U_{sat+} - U_{sat-})$$

$$r_1 = R_1 + R_2$$

b.)

$$u_{S-} = U_{sat-} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$u_{S+} = U_{sat+} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$u_H = \frac{R_1}{R_1 + R_2} (U_{sat+} - U_{sat-})$$

$$r_1 = \infty \text{ (ideal)}$$

Bild 1-45:
Nullpunktsymmetrische Schmitt-Trigger:
a.) Nichtinvertierende Grundschaltung
b.) Invertierende Grundschaltung.

Wir betrachten exemplarisch den nichtinvertierenden Schmitt-Trigger (Bild 1-45 a.).

Wir beginnen mit der Ausgangslage $u_1 = u_2 = u_{sat-}$, wobei u_{sat-} die maximal mögliche negative Ausgangsspannung ist. Es gilt am (+) Eingang:

$$i_2 = \frac{u_1 - (-u_{sat-})}{R_1 + R_2} = \frac{u_1 + u_{sat}}{R_1 + R_2} = i_1$$

$$u_D = u_1 - i_1 \cdot R_1 = u_1 - \frac{u_1 + u_{sat}}{R_1 + R_2} \cdot R_1$$

Da die Ausgangsspannungen meist symmetrisch sind kann für die Rechnung direkt vereinfacht $u_{sat-} = -u_{sat+} = -u_{sat}$. Für die Praxis gilt oft ohne allzu grossen Fehler $u_{sat} = U_{CC}$.

u_D bleibt bis zum Erreichen des positiven Umschaltpunktes u_{s+} negativ. Das Umschalten erfolgt genau dann wenn $u_D = 0V$ erreicht wird:

$$i_{2+} = \frac{u_D - (u_{sat})}{R_2} = \frac{u_{sat}}{R_2}$$

$$u_{s+} = i_{1+} \cdot R_1 = i_{2+} \cdot R_2 = u_{sat} \frac{R_1}{R_2} \quad (R_1 < R_2) \quad (1-38)$$

R_1 muss kleiner als R_2 sein, da sonst der Umschaltpunkt über u_{sat} , d.h. der Speisespannung liegen würde. Da u_D jetzt positiver ist als u_{s+} , erfolgt ein Zurückschalten erst beim Erreichen von $u_D = 0V$. Dies wird beim Umschaltpunktes u_{s-} der Fall wenn der Strom $i_{2-} = 0A$ wird:

$$i_{2-} = u_D - \frac{u_{sat}}{R_2} = 0 - \frac{u_{sat}}{R_2} = -\frac{u_{sat}}{R_2}$$

$$u_{s-} = i_{1-} \cdot R_1 = i_{2-} \cdot R_1 = -u_{sat} \frac{R_1}{R_2} \quad (1-39)$$

Beim nullpunktsymmetrischen Schmitt-Trigger sind beide Umschaltpunkte betragsmässig gleich. In Für diesen Fall wird die Hysterese u_H dann besonders einfach:

$$u_H = u_{s+} - u_{s-} = u_{sat} \frac{R_1}{R_2} - \left(-u_{sat} \frac{R_1}{R_2} \right) = 2u_{sat} \frac{R_1}{R_2} \quad (R_1 < R_2) \quad (1-40)$$

Über R_2 kann jede beliebige Hysterese eingestellt werden. Das Problem beider praktischen Dimensionierung ist die Unsicherheit und Streuung der maximalen Ausgangsspannung u_{sat} , die beider Dimensionierung direkt einfließt.

Da der (+) Eingang nicht mehr einen virtuellen Massepunkt verkörpert, wird der Eingangswiderstand:

$$r_1 = R_1 + R_2 \quad (1-41)$$

1.6.8.2 Schmitt-Trigger für eine Betriebsspannung

Der Fall des nullpunktunsymmetrischen Schmitt-Triggers kann als Erweiterung der bisherigen Betrachtungen angesehen werden, indem eine zusätzliche Referenzspannung U_{REF} eingeführt wird. Zu beachten ist, dass der bisherige Nullpunkt nicht nur um den konstanten Wert U_{REF} verschoben wird,

sondern um $\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{REF}$ oder $\frac{R_1 + R_2}{R_2} U_{REF}$, je nach Schaltung

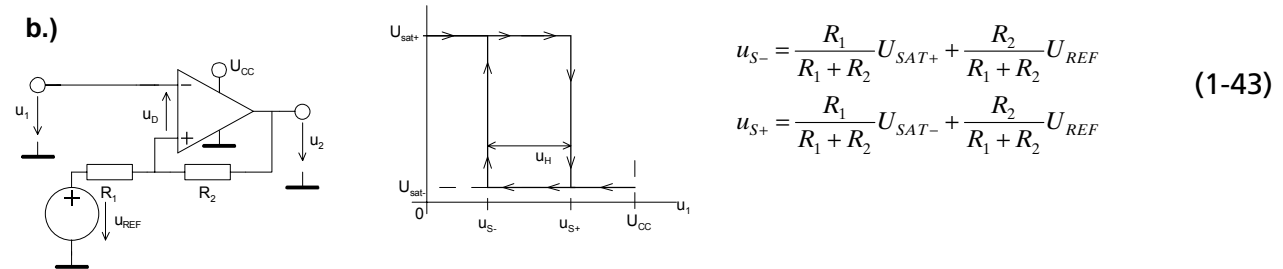
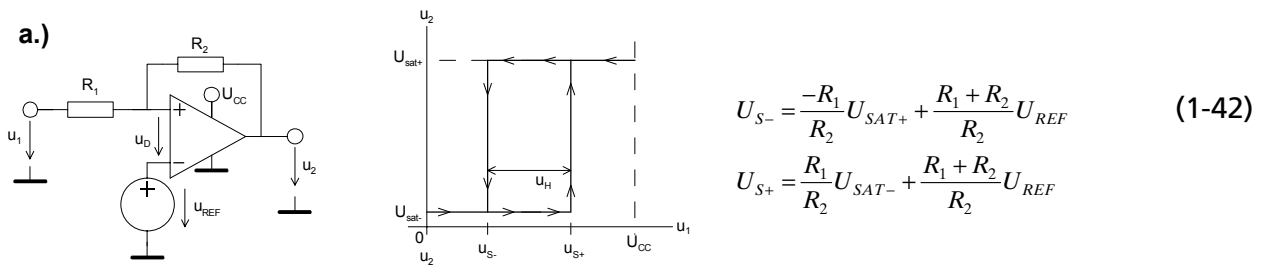


Bild 1-46:
Nullpunktunsymmetrische Schmitt-Trigger:
a.) Nichtinvertierende Grundschtaltung
b.) Invertierende Grundschtaltung.

Bei der Dimensionierung wird zweckmässigerweise ein Widerstand vorgegeben, z.B. R_1 . Dann wird das zugehörige U_{REF} und R_2 berechnet. Eine freie Wahl von R_1, R_2 bei gegebenem U_{REF} ist im allgemeinen Fall nicht möglich.

Man erhält durch Umstellen der Gleichungen (1-42) die Dimensionierungsgleichungen. Sie setzen voraus, dass die Betriebsspannung U_{CC} , die maximalen Ausgangsspannungen U_{SAT+}, U_{SAT-} sowie die Schaltschwellen U_{S+}, U_{S-} vorgegeben sind. Für den nichtinvertierenden Schmitt-Trigger werden diese:

$$R_2 = -\frac{(U_{SAT+} + U_{SAT-}) R_1}{U_{S-} - U_{S+}} \quad U_{REF} = \frac{U_{SAT+} \cdot U_{S+} + U_{SAT-} \cdot U_{S-}}{U_{S+} - U_{S-} + U_{SAT-} + U_{SAT+}} \quad (1-44)$$

Für die invertierende Schaltung kann R_2 und U_{REF} analog hergeleitet werden.

Beispiel 1-2: Dimensionierung eines nullpunktunsymmetrischen Schmitt-Triggers

Ein nicht invertierender Schmitt Trigger mit den Schaltschwellen $U_{S+} = 10V, U_{S-} = 5V$ soll für eine Betriebsspannung von 12V gemäss Bild 1-47 dimensioniert werden. Vereinfachend kann angenommen werden, dass $u_{sat} = U_{CC}$ gilt. Wählbare Widerstände sind mit $10k\Omega$ zu implementieren. Man bestimme anschliessend die effektiven Schaltpunkte, wenn für die gesamte Schaltung E12 Normwerte benutzt werden.

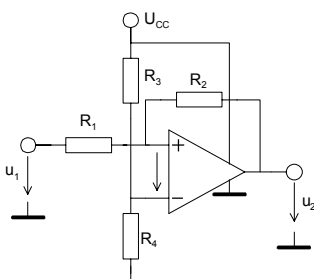


Bild 1-47:
Praktische Realisation eines nullpunktunsymmetrischen Schmitt-Triggers nach Beispiel 1-2.

Lösung:

Man wählt R_1 und R_4 nach Vorgabe mit $10k\Omega$. Mit dem Formelsatz (1-44) findet man direkt R_2 und über die Spannungsteilerformel kann R_3 bestimmt werden. Die exakten Werte werden:

Vorgaben:

$$U_{CC} := 12V \quad U_{Spos} := 10V \quad U_{Sneg} := 5V$$

$$U_{SATpos} := U_{CC} \quad U_{SATneg} := 0V \quad R := 10k\Omega$$

Berechnungen exakte Werte:

$$R_1 := R \quad R_1 = 1 \times 10^4 \Omega$$

$$R_2 := \frac{-(U_{SATpos} + U_{SATneg}) \cdot R_1}{U_{Sneg} - U_{Spos}} \quad R_2 = 2.4 \times 10^4 \Omega$$

$$U_{REF} := \frac{U_{SATpos} \cdot U_{Spos} + U_{SATneg} \cdot U_{Sneg}}{U_{Spos} - U_{Sneg} + U_{SATneg} + U_{SATpos}} \quad U_{REF} = 7.059V$$

$$R_4 := R \quad R_4 = 1 \times 10^4 \Omega$$

$$R_3 := \frac{R_4 \cdot (U_{CC} - U_{REF})}{U_{REF}} \quad R_3 = 7 \times 10^3 \Omega$$

Die Umschaltunkte bei Verwendung E12 normierter Werte ergeben sich direkt unter Anwendung von (1-42):

Schaltpunkte mit E12 Normwerte n:

$$R_1 := 10k\Omega \quad R_2 := 22k\Omega \quad R_3 := 6.8k\Omega \quad R_4 := 10k\Omega$$

$$U_{REF} := U_{CC} \frac{R_4}{R_3 + R_4} \quad U_{REF} = 7.143V$$

$$U_{Spos} := \frac{R_1}{R_2} U_{SATneg} + U_{REF} \frac{R_1 + R_2}{R_2} \quad U_{Spos} = 10.39V$$

$$U_{Sneg} := \frac{-R_1}{R_2} U_{SATpos} + U_{REF} \frac{R_1 + R_2}{R_2} \quad U_{Sneg} = 4.935V$$

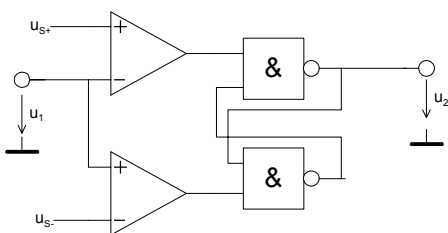
$$U_H := U_{Spos} - U_{Sneg} \quad U_H = 5.455V$$

1.6.9 Präzisions-Schmitt-Trigger

Die Dimensionierung nach Gl. (1-36),(1-37),(1-42),(1-43) zeigen vielfach nicht die Präzision, die man sonst von Dimensionierungsgleichungen für Operationsverstärkerschaltungen gewohnt ist.

Hauptursache ist die nicht genau bekannte Sättigungsspannung u_{sat} .

Durch Verwendung zweier Komparatoren und einem RS-Flip-Flop kann Schmitt-Trigger realisiert werden, der unabhängig von den Ausgangsspannungen agiert:



Einschaltpegel: $u_{1+} = u_{S+} \quad (u_{S+} > u_{S-})$
 Ausschaltpegel: $u_{1-} = u_{S-}$

Bild 1-48:
 Präzisions-Schmitt-Trigger mit zwei Komparatoren.

1.7 Rechteck Generator

Eine Anwendung des Schmitt-Triggers als Multivibrator stellt der folgende Rechteckgenerator nach [WAI92] dar:

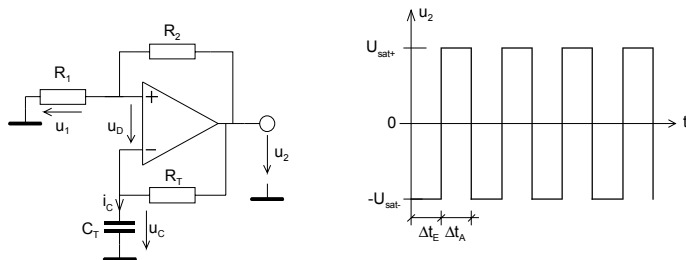


Bild 1-49:
Rechteckgenerator mit Schmitt-Trigger.

Die Dimensionierungsgleichung ist:

$$T = \Delta t_E + \Delta t_A = 2 \cdot R_T \cdot C_T \cdot \ln \left(1 + \frac{2R_1}{R_2} \right) \quad (R_1 < R_2) \quad (1-45)$$

Begründung:

Die Spannung u_1 ist gleich der Spannung u_C über dem Kondensator C_T . Der Kondensator wird daher solange über R_T geladen, bis Umschaltunkt u_{S+} erreicht wird. Nach Gl. (1-37) wird diese Spannung:

$$u_C = u_1 = u_{S+} = u_{sat} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Aus Symmetriegründen gilt für die Entladung:

$$u_C = u_1 = u_{S-} = -u_{sat} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung wird:

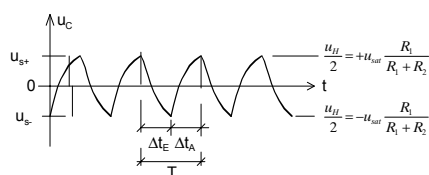


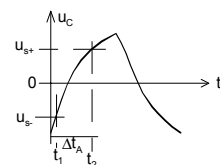
Bild 1-50:
Spannungsverlauf am Kondensator C_T des Rechteckgenerators.

Für die Ladekurve über den Zeitabschnitt Δt_A gilt:

$$u_{CA}(t_A) = 2 \cdot u_{sat} \left(1 - e^{-\frac{t_A}{\tau}} \right) \quad \tau = R_T \cdot C_T$$

$$t_A = -\tau \cdot \ln \left(1 - \frac{u_{CA}}{2 \cdot u_{sat}} \right) = -\tau \cdot \ln \left(\frac{2 \cdot u_{sat} - u_{CA}}{2 \cdot u_{sat}} \right) = \tau \cdot \ln \left(\frac{2 \cdot u_{sat}}{2 \cdot u_{sat} - u_{CA}} \right)$$

$$\Delta t_A = t_2 - t_1 = \tau \cdot \ln \left(\frac{2 \cdot u_{sat}}{2 \cdot u_{sat} - u_{S+}} \right) - \tau \cdot \ln \left(\frac{2 \cdot u_{sat}}{2 \cdot u_{sat} - u_{S-}} \right) = \tau \cdot \ln \left(\frac{2 \cdot u_{sat} - u_{S-}}{2 \cdot u_{sat} - u_{S+}} \right)$$



Mit $u_{S\pm} = \frac{2u_{sat} \pm u_H}{2}$ wird.

$$\Delta t_A = \tau \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot u_{sat} + u_H}{2 \cdot u_{sat} - u_H}\right)$$

Aus Symmetriegründen muss $\Delta t_A = \Delta t_E$ gelten. Deshalb wird für die gesamte Periode T:

$$T = \Delta t_A + \Delta t_E = 2R_T \cdot C_T \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot u_{sat} + u_H}{2 \cdot u_{sat} - u_H}\right) \quad (1-46)$$

Alternativ kann auch die Entladekurve beschrieben und Δt_E bestimmt und in (1-46) werden. Die Hysteresespannung wird mit (1-40) eingesetzt und man erhält die Dimensionierungsformel (1-45):

$$T = 2 \cdot R_T \cdot C_T \cdot \ln\left(1 + \frac{2 \cdot R_1}{R_2}\right) \quad (R_1 < R_2) \quad (1-47)$$

Beispiel 1-3: 100Hz-Rechteckgenerator

Mit einem OpAmp 741 soll ein Rechteckgenerator mit $f=100\text{Hz}$ realisiert werden. Die Speisung beträgt $U_{CC}=\pm 12\text{V}$. Die Hysterese ist mit $u_H=U_{CC}$ zu wählen. Vereinfachend kann angenommen werden, dass $u_{sat}=U_{CC}$ gilt.

Lösung:

Bei 100Hz ist die Aussteuerbarkeit des Operationsverstärkers bei einer Slew Rate $0.5\text{V}/\mu\text{s}$ sichergestellt. Daher wird die Dimensionierung mit Gl. (1-47) direkt:

$$u_H = U_{CC} \quad R_1 = R_2 = 10\text{k}\Omega \quad (\text{Wahl})$$

$$T = 2 \cdot R_T \cdot C_T \cdot \ln\left(1 + \frac{2R_1}{R_2}\right) = 2 \cdot R_T \cdot C_T \cdot \ln(3) \quad C_T = 100\text{nF} \quad (\text{Wahl})$$

$$R_T = \frac{T}{2 \cdot C_T \cdot \ln(3)} = \frac{1}{2 \cdot f \cdot C_T \cdot \ln(3)} = \frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 10^{-9} \cdot \ln(3)} = 45.511\text{k}\Omega$$

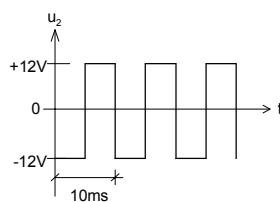
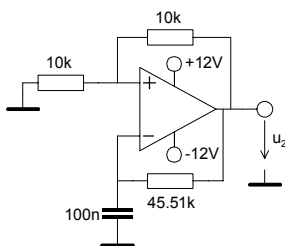


Bild 1-51:
Realisation des Rechteckgenerators nach Beispiel 1-3.

1.8 Funktionsnetzwerke

Sie verkörpern Analogrechnerbausteine. Die Ausgangsspannung u_2 kann durch eine beliebige Funktion f beschrieben werden:

$$u_2 = f(u_1)$$

Häufig benutzte Vertreter dieser Klasse sind Logarithmierer, Exponentialverstärker und Sinuskonverter.

Zur Realisation gibt es nach [TIE99] drei Möglichkeiten:

- Heranziehen eines phys. Effektes der den Zusammenhang vorgibt
- Funktion durch Polynomzüge approximieren
- Funktion durch Potenzreihen approximieren

Grosse Bedeutung haben Logarithmierer und Exponentialverstärker. Durch Zusammenschaltung dieser Funktionsbausteine können beispielsweise die folgenden mathematischen Funktionen durchgeführt werden.

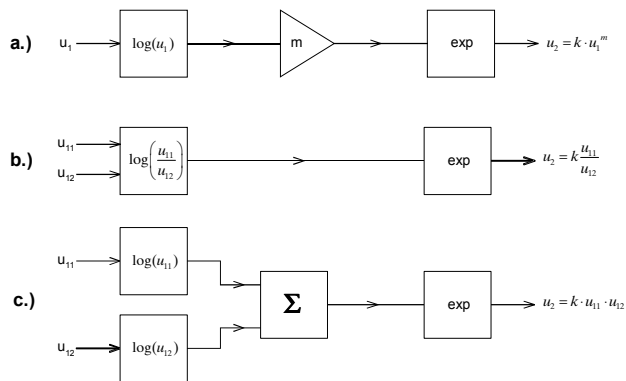


Bild 1-52: Beispiele analoger Rechnertechnik: Potenzieren, Multiplizieren und Dividieren mit analogen Funktionsblöcken unter Verwendung von Logarithmierer und Exponentialverstärker.

Eine Anwendung wäre z.B. die analoge Berechnung von Effektivwerten von Spannungen und Strömen.

1.8.1 Logarithmierer

Der Logarithmierer dient als Analogrechnerbaustein, um z.B. im Zusammenwirken mit Summierer und Exponentialverstärker Multiplikationen oder Wurzelberechnungen durchzuführen.

Die Grundschaltung des Logarithmierers:

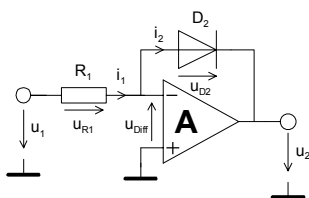


Bild 1-53: Grundschaltung des Logarithmierers. Der logarithmische Zusammenhang U_D - I_D in der Rückführung bewirkt die Logarithmusfunktion.

$$u_2 = -n \cdot U_T \cdot \ln\left(\frac{u_1}{R_1 I_S} + 1\right) \approx -n \cdot U_T \cdot \ln\left(\frac{u_1}{R_1 I_S}\right) \quad (1-48)$$

Begründung der Formel (1-48):

$$\frac{u_1 + u_{Diff}}{R_1} = I_S \left(e^{\frac{-u_2 - u_{Diff}}{n \cdot U_T}} - 1 \right) \quad \left| A \rightarrow \infty \Rightarrow u_{Diff} = 0 \right.$$

$$\frac{u_1}{R_1} = I_S \left(e^{\frac{-u_2}{n \cdot U_T}} - 1 \right)$$

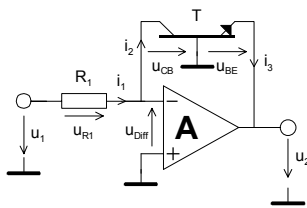
$$\frac{u_1}{R_1 I_S} + 1 = e^{\frac{-u_2}{n \cdot U_T}} \quad \Rightarrow u_2 = -n \cdot U_T \cdot \ln \left(\frac{u_1}{R_1 I_S} + 1 \right) \approx -n \cdot U_T \cdot \ln \left(\frac{u_1}{R_1 I_S} \right)$$

Da für $I_2 \gg I_S$ folgt $\frac{u_1}{R_1 I_S} \gg 1$. Man darf daher die Formel mit vernachlässigbarem Fehler vereinfachen:

Falls z.B. $u_{BE} > 100\text{mV}$ ist wird $e^{\frac{u_{BE}}{U_T}} = 52.07$, was einem Fehler von ca. 2% entspricht gegenüber $e^{\frac{u_{BE}}{U_T}} - 1$. Man muss sich aber im Klaren sein, dass ein $u_2 \approx 100\text{mV}$ in der Schaltung die untere Limite darstellt. Bei grösseren Eingangsspannung wird der Fehler wesentlich kleiner.

In der Praxis arbeitet diese Schaltung trotzdem nicht befriedigend, da sie nur über ein bis zwei Dekaden brauchbar ist. Grund: Die Diode besitzt einen nicht zu vernachlässigenden Seriewiderstand und der stromabhängige Emissionskoeffizient n verfälscht vor allem bei grösseren Strömen die Logarithmierung.

Eine wesentliche Verbesserung kann durch den Einsatz eines Transistors anstatt der Diode als nichtlineares Element erfolgen. Der Transistor arbeitet als sog. Transdiode.



$$u_2 = -U_T \cdot \ln \left(\frac{u_1}{I_{ES} \cdot R_1} + 1 \right) \approx -U_T \cdot \ln \left(\frac{u_1}{I_{ES} \cdot R_1} \right) \quad (1-49)$$

Bild 1-54:
Verbesserte Logarithmierschaltung durch Verwendung eines Transistors.

Begründung der Formel (1-49):

Der Kollektorstrom des Transistors lautet mit dem statischen Ebers-Moll-Modell:

$$I_C = A_N \cdot I_{ES} \left(e^{\frac{u_{BE}}{U_T}} - 1 \right) - A_R I_{CS} \left(e^{\frac{u_{BC}}{U_T}} - 1 \right)$$

I_{CS} und I_{ES} verkörpern die Sättigungsperrströme des Transistoren und sind Materialkonstanten. A_N ist die Gleichstromverstärkung der Basisschaltung für den Normalbetrieb und liegt in der Grössenordnung $A_N = 0.98 \dots 0.9998$, also fast 1.

Die Temperaturspannung U_T ist gemäss Halbleiterphysik:

$$U_T = \frac{k \cdot T}{q}$$

k : Boltzmann-Konstante $1.38 \cdot 10^{-23}$
 q : Elementarladung des Elektrons $1.6 \cdot 10^{-19}$
 T : Temperatur in K

Bei Raumtemperatur (20°C) wird U_T daher:

$$U_T = \frac{k \cdot T}{q} = \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 293}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 25.3 \text{ mV}$$

Da der (-) Eingang virtuell auf Masse liegt folgt $U_{CB}=0$ und der Strom i_2 wird daher:

$$\begin{aligned} i_2 = I_C &= A_N \cdot I_{ES} \left(e^{\frac{u_{BE}}{U_T}} - 1 \right) \\ &= I_{ES} \left(e^{\frac{u_{BE}}{U_T}} - 1 \right) \quad (A_N = 1 \rightarrow H_{FE} \text{ gross}) \end{aligned}$$

Die Ausgangsspannung wird mit dem Vorgehen wie bei Formel:

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{R_1} &= I_{ES} \left(e^{\frac{u_{BE}}{U_T}} - 1 \right) \\ \frac{u_1}{R_1 I_{ES}} + 1 &= e^{\frac{u_{BE}}{U_T}} \quad u_{BE} = U_T \cdot \ln \left(\frac{u_1}{R_1 I_{ES}} + 1 \right) \end{aligned}$$

Mit dem Zusammenhang $u_{BE} = -u_2$ wird die Ausgangsspannung:

$$u_2 = -U_T \cdot \ln \left(\frac{u_1}{R_1 I_{ES}} + 1 \right) \approx -U_T \cdot \ln \left(\frac{u_1}{R_1 I_{ES}} \right)$$

Der nutzbare Eingangsspannungsbereich kann repräsentativ aus Beispiel 1-4 entnommen werden. Die Steilheit der Übertragungskennlinie beträgt ca. 59mV/Dekade:

$$\begin{aligned} u_{21} &= -U_T \ln \left(\frac{u_{11}}{R_1 I_{ES}} \right) \quad u_{22} = -U_T \ln \left(\frac{u_{12}}{R_1 I_{ES}} \right) \\ \Delta u_2 &= u_{21} - u_{22} = U_T \left(\ln \left(\frac{u_{12}}{R_1 I_{ES}} \right) - \ln \left(\frac{u_{11}}{R_1 I_{ES}} \right) \right) = U_T \ln \left(\frac{u_{12}}{u_{11}} \right) \\ U_T \ln \left(\frac{10u_1}{u_1} \right) &= 0.0253 \cdot \ln(10) = 58.26 \frac{\text{mV}}{\text{Dekade}} \end{aligned}$$

Wird eine Steilheit von z.B. 1V/Dekade gefordert, muss ein Skaliervverstärker nachgeschaltet werden, der die Ausgangsspannung um den Faktor 16.9 (1/59mV) verstärkt.

Folgende nicht ideale Effekte sind zu beachten:

Der Transistor in der Logarithmierschaltung erhöht die Schleifenverstärkung. Daher kann die Schaltung zum Schwingen neigen. Die Spannungsverstärkung lässt sich aber durch Einfügen eines Emitterwiderstandes R_2 auf das Niveau R_1/R_2 herabsetzen. R_2 darf nur so gross gewählt werden, dass der Operationsverstärker nicht übersteuert werden kann. Durch Antiparallelschalten einer Diode D_1 kann Übersteuerung bei negativen Ausgangsspannungen vermieden werden. Sie verkürzt die Erholzeit und schont den Transistor vor zu hohen Basis-Emittersperrspannungen.

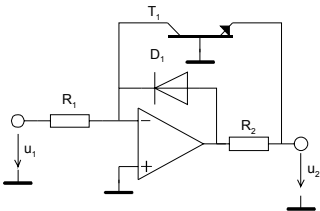
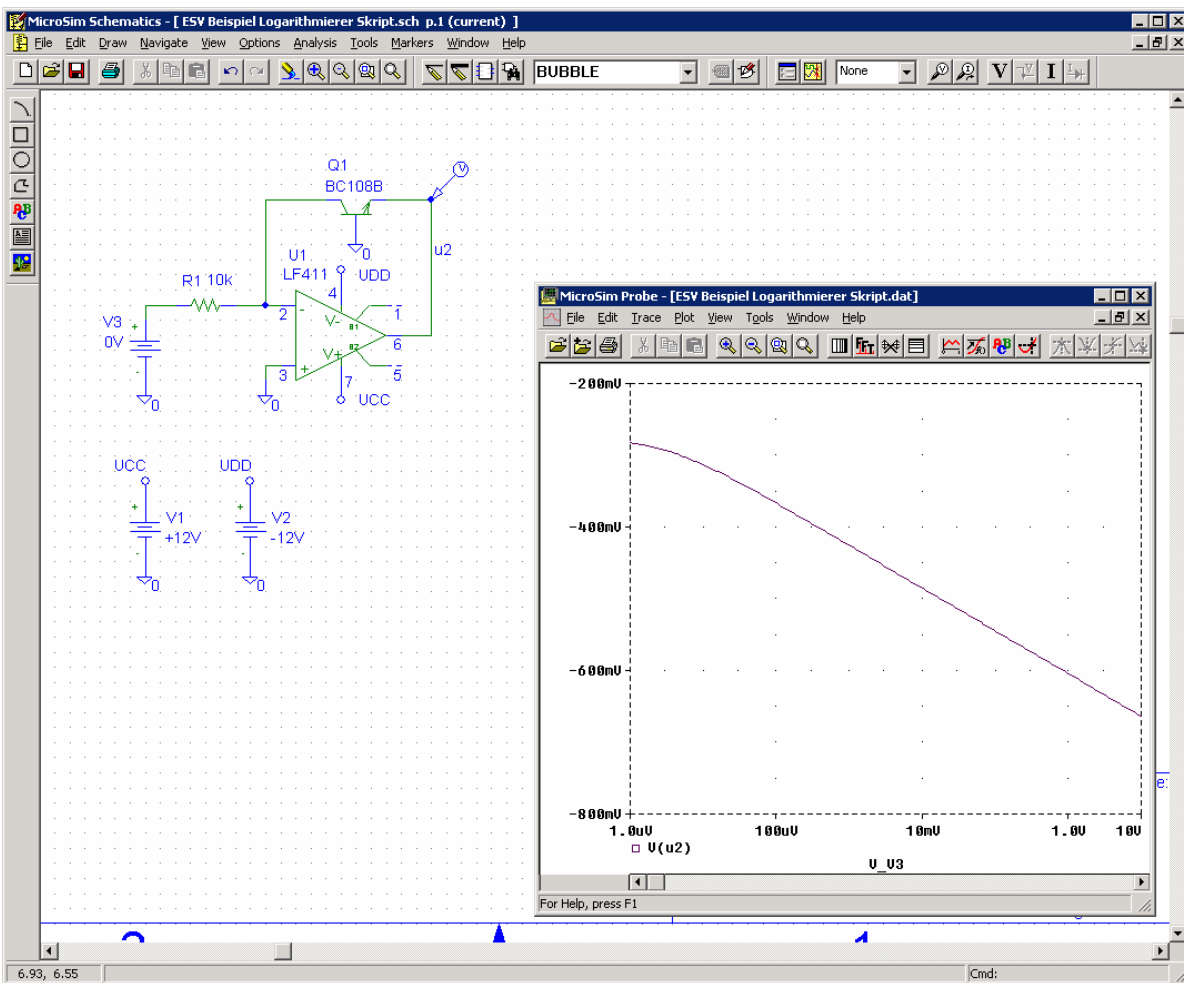


Bild 1-55:
 Verbesserung der Erholzeit und Herabsetzen der Schwingneigung durch Einfügen von D_1 und R_2 .

Beispiel 1-4: (Logarithmierer)

Simulation eines Logarithmierers mit FET-OpAmp LF411 und Transistor BC108B gemäss Schema. Zu zeigen ist der Verlauf der Ausgangsspannung u_2 bei einer Aussteuerung mit [0,10V].



Die Temperaturabhängigkeit der Logarithmierschaltung nach Bild 1-54 liegt an der Temperaturabhängigkeit von U_{BE} das mit $2\text{mV}/^\circ\text{C}$ abnimmt und I_{ES} . Zusätzlich ist U_T stark temperaturabhängig. Man sieht direkt aus der Definitionsgleichung, dass mit $1/293$ pro K, resp. einen $T_K=0.34\%/K$ bei Zimmertemperatur aufweist.

Ein möglicher Weg zur Temperaturkompensation sei mit folgendem Prinzipschaltbild (der Einfachheit halber mit Dioden) aufgezeigt:

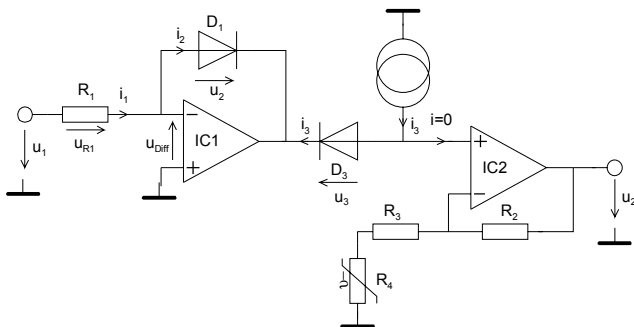
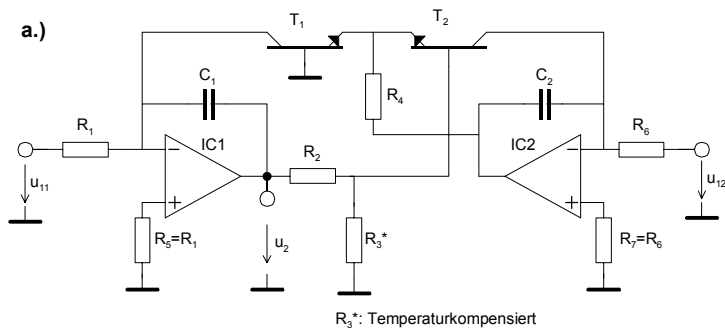


Bild: Temperaturkompensation beim Logarithmierer durch Einfügen von D3 und temperaturabhängige Verstärkung mit R4.

Die Spannungsdrift von $-2\text{mV}/K$ an D_1 wird dem gleichen Driftverhalten der Diode D_2 kompensiert. D_2 arbeitet hier immer Durchlassrichtung, weil ein Konstantstrom I_3 eingespiesen wird. IC2 stellt mit dem NTC R_4 im Rückführzweig einen temperaturabhängigen Verstärker dar. Der Temperaturkoeffizient der Verstärkung soll $-0.34\%/K$ betragen und kompensiert so den Einfluss von U_T .

Eine Weiterentwicklung ist die Schaltung nach [WAI75], S.196. Sie bietet eine Temperaturkompen-



R_3^* : Temperaturkompensiert

$$u_2 = -K_1 \cdot \ln\left(\frac{K_2 \cdot u_{11}}{u_{12}}\right)$$

$$K_1 = \frac{R_2 + R_3}{R_3} \frac{k \cdot T}{q} = \frac{R_2 + R_3}{R_3} U_T \quad (1-50)$$

$$K_2 = \frac{R_6}{R_1}$$

b.)

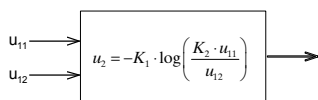


Bild 1-56: Temperaturkompensierter Logarithmierer für Spannungsverhältnisse nach [WAI75], S.197.
 a.) Schema
 b.) Funktionsblockdarstellung

sation, Skalierung und Nullpunktverschiebung der Ausgangsspannung:

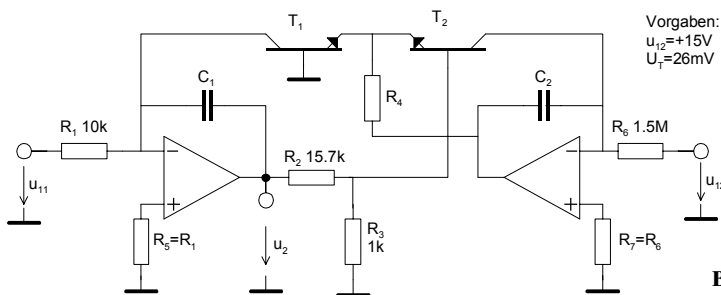
Arbeitsweise:

T_1 und T_2 arbeiten als Transistorpaar, wobei sich die Drift der beiden Basis-Emitterspannungen U_{BE} kompensiert. Der Spannungsteiler R_2 - R_3 dient zur Skalierung der Übertragungskennlinie, indem er das U_{BE} um den Faktor $\frac{R_2 + R_3}{R_2}$ verstärkt. Also z.B. Faktor 16.9 für 1V pro Dekade. Mit der Spannung u_{12}

lässt sich der Nullpunkt der Übertragungskennlinie verschieben. Der Widerstand R_3 besitzt einen Temperaturkoeffizienten von $-0.34\%/^{\circ}\text{C}$ ($-1/293$) und dient zur Kompensation der Temperaturabhängigkeit von U_T . Er wird durch Zusammenschaltung eines NTC mit einem Widerstand realisiert. Die Kondensatoren C_1 und C_2 verbessern die Stabilität (Schwingneigung), allerdings auf Kosten der Einschwingzeit, vor allem bei kleinen Signalen. R_4 ist an sich unkritisch und geht wertmässig nicht in die Berechnung ein. Man wählt ihn nach [TIE99], S.788 so, dass der Spannungsabfall kleiner bleibt als die Aussteuerbarkeit des Operationsverstärker IC2.

Beispiel 1-5: (Temperaturkompensierter Logarithmierer)

Man bestimme die Faktoren K_p , K_2 und $u_2(u_{1p}, u_{12})$ der Schaltung in Bild 1-57. Man zeichne die Transferfunktion $u_2(u_{11})$.



Vorgaben:
 $u_{12} = +15\text{V}$
 $U_T = 26\text{mV}$

Bild 1-57:
 Beispiel eines temperaturkompensierten Logarithmierers.

Lösung:

$$K_1 = U_T \frac{R_2 + R_3}{R_3} = 0.026 \frac{15.7\text{K} + 1\text{K}}{1\text{K}} = 0.433\text{V}$$

$$K_2 = \frac{R_6}{R_1} = \frac{1.5\text{M}}{10\text{K}} = 150$$

$$u_2 = -K_1 \cdot \ln\left(\frac{K_2 \cdot u_{11}}{u_{12}}\right) = -0.433 \cdot \ln\left(\frac{150 \cdot u_{11}}{15}\right) = -0.433 \cdot \ln(10 \cdot u_{11}) = -\log_{10}(10 \cdot u_{11})$$

Die Transferfunktion wird idealisiert für 4 Dekaden skizziert:

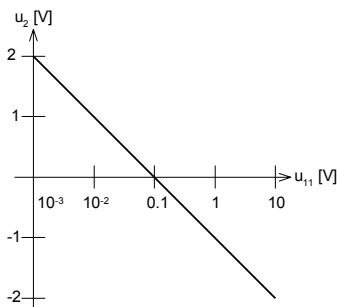
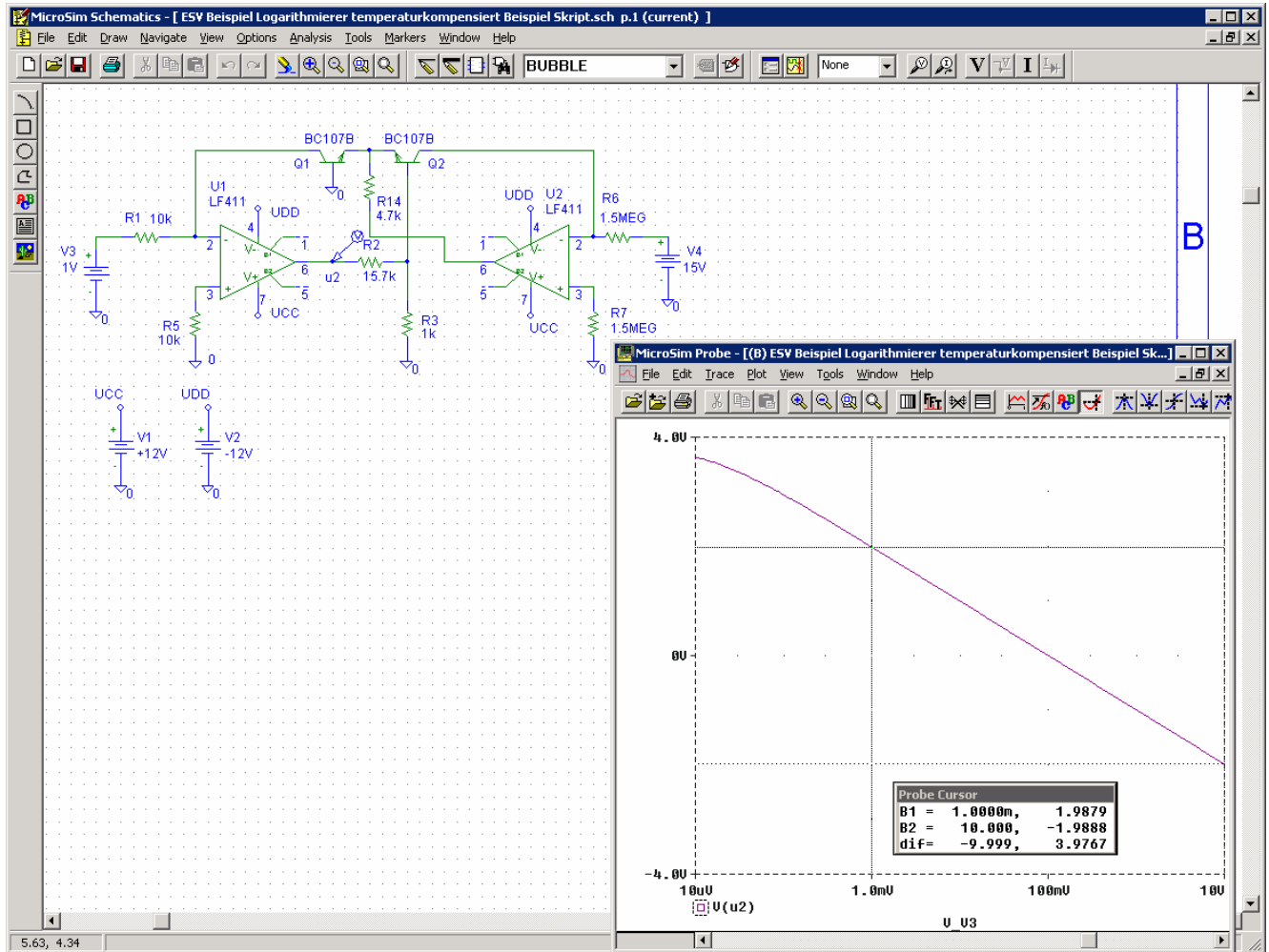


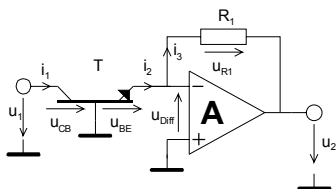
Bild 1-58:
 Idealisierte Transferfunktion des temperaturkompensierten Logarithmierers nach Beispiel 1-5.

Eine Computersimulation mit Standardbauelementen bestätigt die Resultate:



1.8.2 Exponentialverstärker

Er stellt das Gegenstück zum Logarithmierer dar und wird meist auch zusammen verwendet. Die Grundsaltung des Exponentialverstärkers erhält man durch Vertauschen des Widerstandes und Transistor:



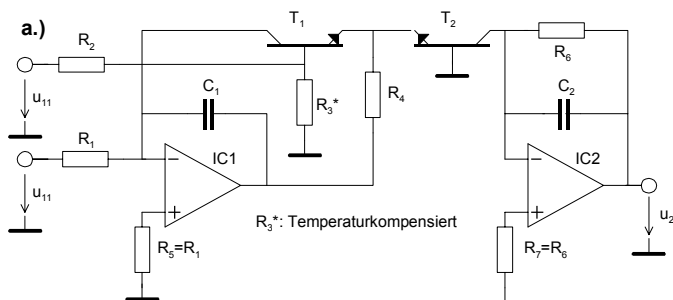
$$u_2 = I_{CS} \cdot R_1 \cdot \left(e^{\frac{-u_1}{U_T}} - 1 \right) \approx I_{CS} \cdot R_1 \cdot \left(e^{\frac{-u_1}{U_T}} \right) \quad (u_1 < 0) \quad (1-51)$$

Bild 1-59:
 Grundsaltung des Exponentialverstärkers.

Die Herleitung der Transfergleichung ist analog dem Logarithmierer, nur dass T und R_1 vertauscht sind. Auch diese Schaltung zeigt neben der schlechten Skalierbarkeit eine ausgeprägte Temperaturdrift.

Deshalb wird in der Praxis eine temperaturkompensierte Schaltung mit zwei Operationsverstärkern vorgezogen.

Wir zeigen auch hier ein mögliche Schaltung nach [WAI75], S.199:



$$u_2 = K_1 \cdot u_{12} \cdot e^{-K_2 \cdot u_{11}} = K_1 \cdot u_{12} \cdot 10^{-K_3 \cdot u_{11}} \quad (u_1 > 0) \quad (1-52)$$

$$K_1 = \frac{u_{12} R_6}{R_1}$$

$$K_2 = \frac{R_2 + R_3}{R_3} \frac{q}{k \cdot T} = \frac{R_2 + R_3}{R_3} \frac{1}{U_T}$$

$$K_3 = \frac{R_2 + R_3}{R_3} \frac{q}{2.3 \cdot k \cdot T}$$

b.)

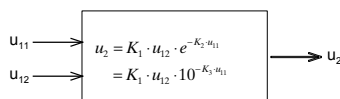


Bild 1-60:
 Temperaturkompensierter Exponentialverstärker nach [WAI75], S.197.
 a.) Schema
 b.) Funktionsblockdarstellung

Der Widerstand R_3 sollte wiederum einen TK haben dass K_2 temperaturunabhängig wird (ca. -0.3%/K). R_4 ist an sich unkritisch, es gelten dieselben Gesichtspunkte wie beim Logarithmierer.

Beispiel 1-6: (Exponentialverstärker)

Man bestimme uns skizziere die Transferfunktion des Exponentialverstärkers nach Bild 1-60, wenn die Komponenten folgende Werte haben:

$$R_1 = R_5 = 30k\Omega \quad R_2 = 15.7k\Omega \quad R_3 = 1k\Omega$$

$$R_4 = 2k\Omega \quad R_5 = R_6 = 10k\Omega$$

$$u_{12} = +15V$$

Lösung:

$$u_2 = 5 \cdot 10^{-u_{11}} \quad (u_{11} > 0)$$

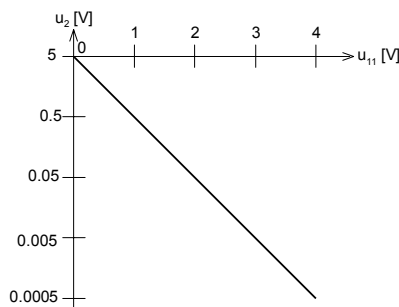


Bild 1-61:
 Idealisierte Transferfunktion des temperaturkompensierten Exponentialverstärkers nach Beispiel 1-6.

1.8.3 Sinus-Cosinus Approximation

Sie werden vor allem für Funktionsgeneratoren benutzt bei den aus einer Dreiecksspannung eine Sinusspannung erzeugt werden soll. Je nach Aufwand der Schaltung sind Klirrfaktoren $>0.1\%$ ohne zusätzliche Filterung möglich.

Eine verbreitete Methode zur Erzeugung ist die stückweise Approximation. So muss das erzeugende Netzwerk für kleine Spannungen eine Verstärkung von 1 besitzen, die aber für Grössere Spannungen abnehmen muss. Dies kann durch vorgespannte Dioden erreicht werden, wie in gezeigt:

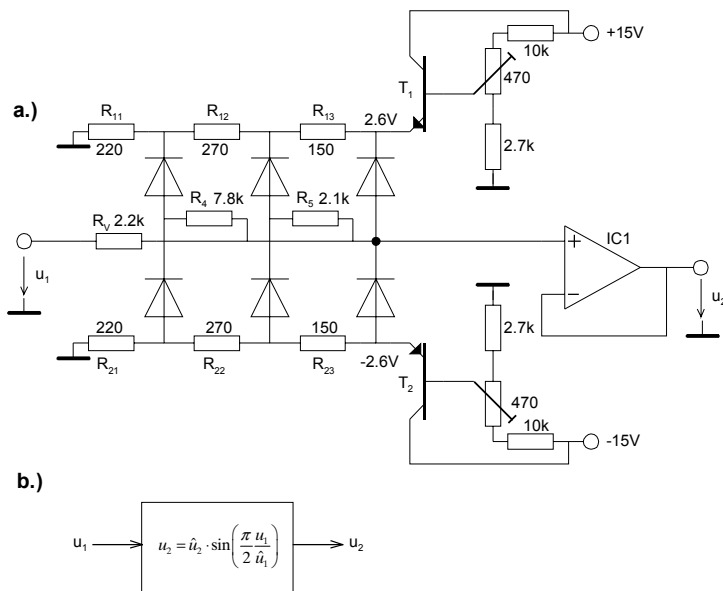


Bild 1-62:

Sinuskonverter mit 6 Knickpunkten nach [TIE99], S.792. Die Potentiometer dienen zum Abgleich auf minimalen Klirrfaktor.

a.) Schema

b.) Funktionsblockdarstellung

Da die Dioden nicht schlagartig leiten, sondern exponentielle Kennlinien besitzen, kann man auch mit wenigen Dioden kleine Klirrfaktoren erreichen. Bei der Dimensionierung des Netzwerkes muss man die Knickpunkte der Approximationskurve festlegen. Nach [TIE99] verschwinden die Oberwellen, wenn man $2n$ Knickpunkte an die Stellen der Eingangsspannung legt:

$$u_{1k} = \pm \frac{2k}{2n+1} \hat{u}_1 \quad 0 < k \leq n$$

Die zugehörige Ausgangsspannung wird dann:

$$u_{2k} = \pm \frac{2}{\pi} \cdot \hat{u}_1 \cdot \sin\left(\frac{n \cdot k}{2n+1}\right) \quad 0 < k \leq n \quad (1-53)$$

Damit wird mit $2n=6$ Knickpunkten ein theoretischer Klirrfaktor von 1.8% erreicht, bei $2n=12$ einer von 0.8%. Durch die realen Verlauf Diodenkennlinien werden die Praxiswerte aber wesentlich günstiger.

2.2 Filteranforderungen

Die Anforderungen an das Filter werden mit Filterschablonen im Frequenz- und Zeitbereich definiert.

Sie legen die minimalen Anforderungen und erlaubten Toleranzen fest. Die Filtersynthese sollte dann das einfachste Filter liefern, das diese Anforderungen gerade noch erfüllt.

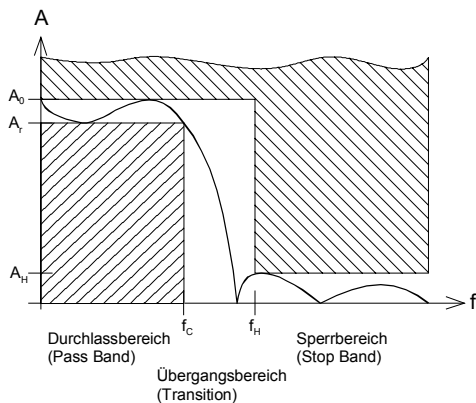


Bild 2-2:

Filterschablone zur Spezifikation der Dämpfungsanforderung. Die schraffierten Bereiche sind verbotene Bereiche, d.h. der Amplitudengang muss sich innerhalb der nichtschraffierten Zone bewegen.

Analog können für das Überschwingen bei der Sprungantwort, den Phasengang und für die Gruppenlaufzeit Schablonen vorgegeben werden.

Legende zu den Symbolen in der Dämpfungsschablone:

- A_0 : Durchgangsdämpfung oder Verstärkung. Meist in dB spezifiziert.
- A_r : Zugelassene Welligkeit im Durchlassbereich. Meist in dB spezifiziert.
- A_c : Dämpfung bei der Durchlass-Grenzfrequenz f_c . Meist in dB spezifiziert.
- A_H : Minimale Sperrdämpfung. Meist in dB spezifiziert.
- f_c : Durchlass-Grenzfrequenz. Frequenz bei der die Welligkeit A_r erstmals überschritten wird. Bei Filter ohne Welligkeit im Durchlass ist dies die -3dB -Frequenz. In Hz oder rad/s spezifiziert.
- f_H : Sperr-Grenzfrequenz. Frequenz, bei der die Sperrdämpfung erreicht werden muss. In Hz oder rad/s spezifiziert.

Normalerweise wird etwas Welligkeit im Durchlassbereich zugelassen, da dies den Entwurf wesentlich selektiverer Filter erlaubt (Tschebyscheff-Filter). Dies trifft auch für den Sperrbereich zu. Die Synthese und Realisation von Filtern mit Welligkeit im Sperrbereich ist aber wesentlich aufwendiger (Inverse Tschebyscheff, Elliptische Filter).

2.3 Filtertypen

Man unterscheidet anhand des Amplitudenganges vier Grundformen:

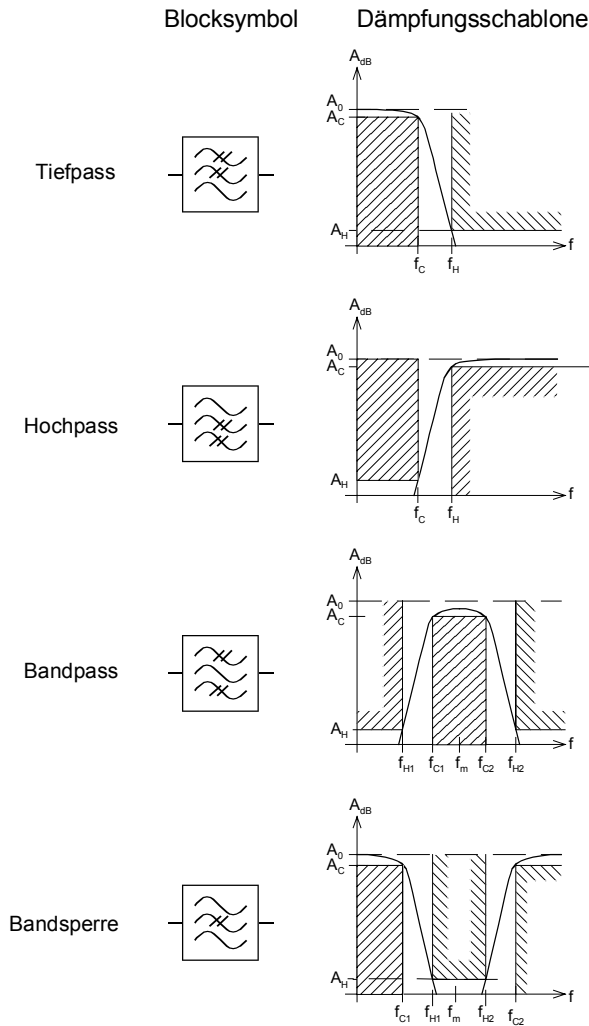


Bild 2-3:
 Dämpfungsschablonen und Blocksymbole
 der vier Filter-Grundtypen

Das Tiefpassfilter stellt das Grundfilter dar. Alle anderen Typen können aus dem Tiefpassfilter über Transformationen abgeleitet werden.

2.4 Filtercharakteristiken

Sie werden anhand des Amplitudenverlaufs im Durchlass- und Sperrbereich unterschieden. Man beurteilt dabei primär die Welligkeit im Durchlass und Sperrbereich und Flankensteilheit. Generell haben Filter mit Welligkeit eine grössere Flankensteilheit, dafür aber schlechteres Impuls- und Gruppenlaufzeitverhalten.

Die hauptsächlich verwendeten Charakteristiken sind:

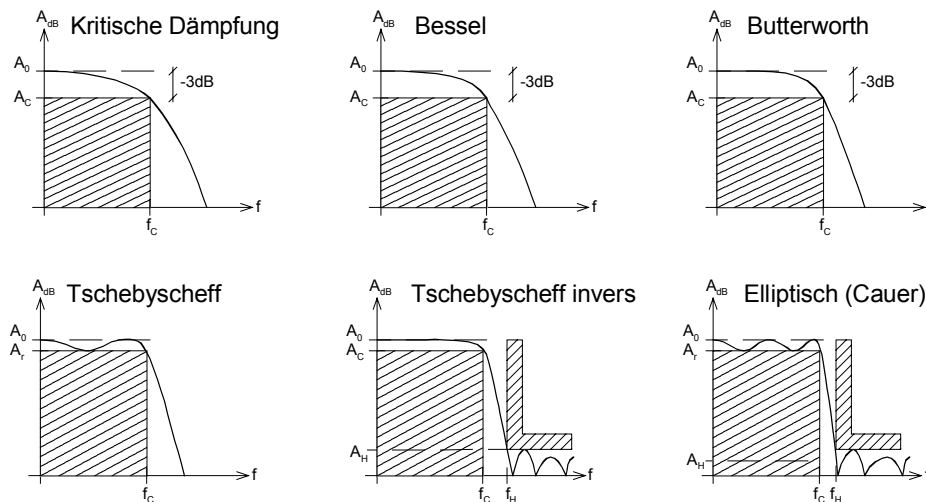


Bild 2-4:
 Amplitudenverlauf verschiedener Tiefpasscharakteristiken

Kritische Dämpfung

Filter mit kritischer Dämpfung entstehen durch rückwirkungsfrei kaskadierte RC-Glieder. Sie haben in der Filtertechnik keine Bedeutung, da die erreichbare Flankensteilheit pro Filterordnung schlecht ist.

Bessel

Bessel-Filter haben keine Welligkeit im Durchlassbereich und konstante Gruppenlaufzeit und dadurch ein gutes Impulsverhalten. Hohe Flankensteilheiten bedingen hohe Filterordnungen. Sie werden deshalb nur in Spezialfällen eingesetzt.

Butterworth

Butterworth-Filter haben keine Welligkeit im Durchlass- und Sperrbereich. Der Amplitudengang läuft flach bis fast zur Grenzfrequenz und fällt dann maximal steil ab. Im Zeitbereich zeigen sie in der Sprungantwort leichtes Überschwingen und eine nicht konstante Gruppenlaufzeit. Das Butterworth-Filter ist das Standardfilter wenn keine Welligkeit im Durchlassbereich zugelassen wird. Ausserdem sind sie sehr einfach zu dimensionieren und zu realisieren.

Tschebyscheff

Tschebyscheff-Filter haben Welligkeit im Durchlassbereich dafür aber eine grössere Flankensteilheit. Grundsätzlich wird die Flankensteilheit grösser, je grösser die Welligkeit gewählt wird. Standardwerte für Welligkeiten sind 0.01, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 3dB. Das Tschebyscheff-Filter (auch Tschebyscheff I) ist das einfachste Filter wenn Welligkeit im Durchlassbereich zugelassen wird. Die Dimensionierung und Realisierung ist ebenfalls einfach.

Tschebyscheff invers

Das inverse Tschebyscheff-Filter (auch Tschebyscheff II) zeigt einen flachen Amplitudengang im Durchlass-, aber Welligkeit im Sperrbereich. Das Gruppenlaufzeitverhalten ist daher etwas besser als beim normalen Tschebyscheff I. Die Berechnung ist einfach, die Realisation wird aber aufwendiger, da die Nullstellen der Übertragungsfunktion auch realisiert werden müssen.

Elliptisch

Die elliptischen Filter haben die grösstmögliche Flankensteilheit (bei gleicher Filterordnung). Sie zeigen Welligkeit im Durchlass- und Sperrbereich, die aber bei der Dimensionierung spezifiziert werden kann. Die Berechnung ist sehr aufwändig, die Implementierung verlangt ebenfalls Schaltungen die Nullstellen, d.h. Dämpfungspole, realisieren. Die Dimensionierung dieses Typs wird normalerweise mit einem Filtersyntheseprogramm durchgeführt.

2.5 Filterentwurf

Der Entwurf und Realisation von Filter geht immer nach demselben Schema vonstatten:

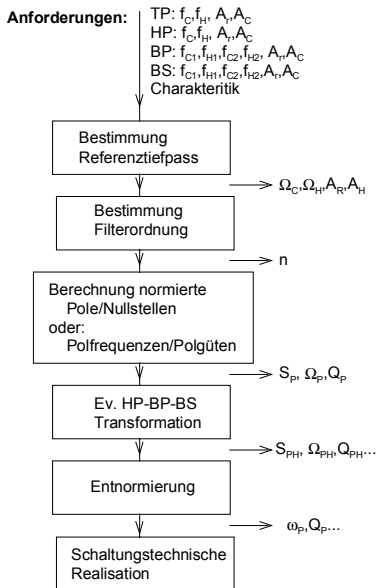


Bild 2-5:
 Schritte beim Filterentwurfsprozess.

Aus den Anforderungen werden die Spezifikationen für den Referenz Tiefpass abgeleitet. Es ist zweckmässig bis zur Dimensionierung der Elemente sämtliche Berechnungen normiert ($\Omega_c=1\text{rad/s}$) durchzuführen.

2.6 Approximation der Übertragungsfunktion

Sie definieren die Amplitudencharakteristik und daher das gesamte Übertragungsverhalten des Filters. Wir beschränken uns auf die in Zusammenstellung in Kap.2.4 gezeigten Verläufe, wobei kritische Dämpfung, Butterworth und Tschebyscheff immer schwerpunktmässig behandelt werden.

Die schaltungstechnische Realisation wird in späteren Kapiteln behandelt.

2.6.1 Tiefpass mit kritischer Dämpfung

Sie verkörpern das Übertragungsverhalten rückwirkungsfrei kaskadierter RC-Glieder erster Ordnung. Die erreichbare Flachheit im Durchlassbereich in Verbindung mit der Flankensteilheit ist bescheiden.

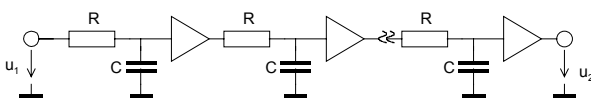


Bild 2-6:
 Filter mit kritischer Dämpfung als Tiefpassfilter n-ter Ordnung.
 Alle Zeitkonstanten RC sind gleich gross

Die Übertragungseigenschaften ergeben sich aus der Gleichung für den Tiefpass n -ter Ordnung:

$$G(s) = \frac{1}{(1 + s\tau)^n} \quad \begin{array}{l} n: \text{Filterordnung} \\ \tau: RC \end{array} \quad (2-2)$$

$$F(\Omega) = \frac{1}{(1 + \Omega^2)^{\frac{n}{2}}} \quad \Omega = \frac{f}{f_c} = \tau \cdot \omega \quad (2-3)$$

$$\varphi(\Omega) = -n \cdot \text{atan}(\Omega) \quad (2-4)$$

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i! \cdot \tau^i} \quad \text{Tiefpass mit krit. Dämpfung} \quad (2-5)$$

Eine Begründung dieser Formeln erübrigt sich, da diese Grundlagen der Elektrotechnik darstellen und somit als bekannt vorausgesetzt werden.

Der Amplituden- und Phasengang wird für verschiedene Filterordnungen:

Formal: $F(\Omega, n) := \frac{1}{(1 + \Omega^2)^{\frac{n}{2}}}$ Amplitudengang normierter Tiefpass mit kritischer Dämpfung der Ordnung n .

$\phi(\Omega, n) := -n \cdot \text{atan}(\Omega)$ Phasengang TP mit kritischer Dämpfung der Ordnung n .

$\Omega := 0.1, 0.2, \dots, 100$ $\text{dB}(x) := 20 \cdot \log(x)$

$$\text{deg}(\phi) := \frac{\phi \cdot 180}{\pi}$$

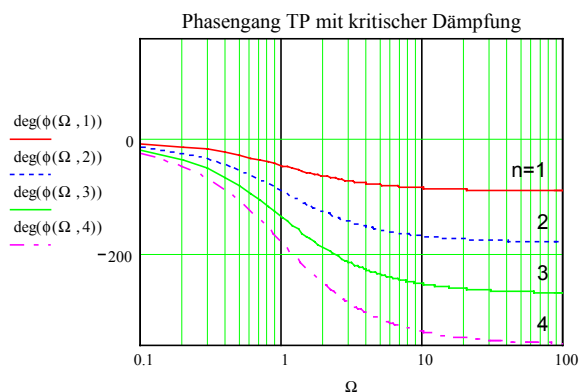
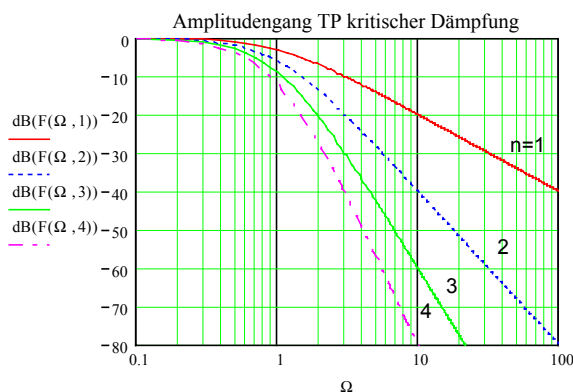


Bild 2-7: Amplituden- und Phasengang beim Tiefpass mit kritischer Dämpfung der Ordnungen 1..4

Man erkennt, dass bei $\Omega=1$ eine Dämpfung von $n \cdot 3\text{dB}$ herrscht. Soll ein Filter mit kritischer Dämpfung n -ter Ordnung bei $\Omega=1$ eine Dämpfung von 3dB aufweisen ist die Grenzfrequenz entsprechend zu korrigieren. Insbesondere ist festzuhalten, das Filter mit kritischer Dämpfung der Ordnung >1 die Grenzfrequenz (im Sinne der -30.1dB Frequenz) nicht bei $\Omega=1$ erreichen.

Dazu betrachtet man die Frequenz, wo ein Tiefpass der Ordnung n mit kritischer Dämpfung den Wert $n \cdot 3.01\text{dB}$ erreicht:

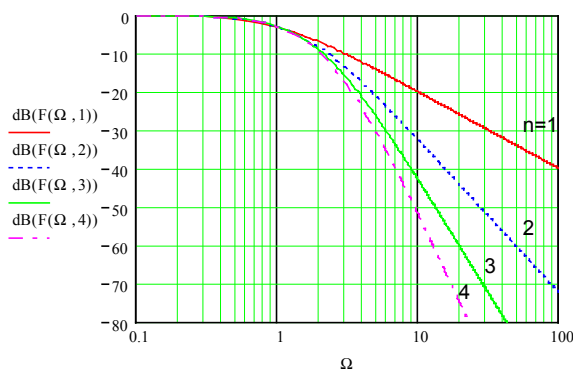
$$-3dB = \frac{1}{(\sqrt{1+\Omega^2})^n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\Omega^2)^n}} \quad \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{(1+\Omega^2)^n}$$

$$(1+\Omega^2)^n = 2 \quad \rightarrow 2^{\frac{1}{n}} - 1 = \Omega^2 \quad \underline{\underline{\Omega = \sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1} = k}}$$

Daraus folgt, dass für ein Filter mit kritischer Dämpfung der Ordnung n die Grenzfrequenz mit diesem Faktor k multipliziert werden muss.

Aplitudengang TP mit kritischer Dämpfung, 3dB-korrigiert



Phasengang TP mit kritischer Dämpfung, 3dB-korrigiert

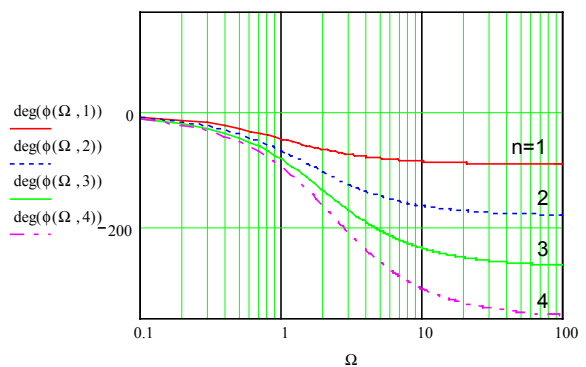


Bild 2-8:
 3-dB dämpfungskorrigierter Verlauf beim Tiefpass mit kritischer Dämpfung der Ordnungen 1..4

Alle Graphen schneiden sich nun im -3dB-Punkt. Nun lässt sich auch die minimal erforderliche Filterordnung n bestimmen.

Wird bei einer Sperrfrequenz f_H eine minimale Sperrdämpfung A_H gefordert, so wird die minimal benötigte Filterordnung bezüglich der normierten Sperrfrequenz Ω_H :

$$A_H \leq \frac{1}{(\sqrt{1+k^2\Omega_H^2})^n} = \frac{1}{\sqrt{(1+k^2\Omega_C^2)^n}}$$

$$A_H^2 \leq (1+k^2\Omega_H^2)^{-n} \quad \rightarrow 2 \ln A_H \leq -n \ln(1+k^2\Omega_H^2)$$

$$\underline{\underline{n \geq \frac{-2 \ln A_H}{\ln(1+k^2\Omega_H^2)} = \frac{-2 \ln A_H}{\ln\left(1 + \left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)\Omega_H^2\right)}}} \quad \left(\Omega_H = \frac{f_H}{f_C}\right)$$

Da k selbst von n abhängig ist kann keine explizite Lösung formuliert werden. Eine numerische Lösung ist aber problemlos möglich. In vielen Fällen dürfte auch eine Abschätzung aus dem Graphen genügend sein.

Beispiel 2-1:(Min. notwendige Filterordnung)

Welche Filterordnung für ein TP mit kritischer Dämpfung mit 1kHz Grenzfrequenz ist minimal notwendig, wenn bei 10kHz eine Sperrdämpfung von 40dB erreicht werden soll?

Lösung:

Vorgaben:

- $f_C := 1 \cdot 10^3$ [Hz] (-3dB Grenzfrequenz)
- $f_H := 10 \cdot 10^3$ [Hz] (Sperrfrequenz)
- $A_{HdB} := 40$ [dB] (geforderte Sperrdämpfung)

Berechnungen:

$$A_H := 10^{-0.05 \cdot A_{HdB}} \quad A_H = 0.01$$

$$\Omega_H := \frac{f_H}{f_C}$$

$n := 1$ Schätzwert fuer numerische MathCad Lösung

Vorgabe

$$n = \frac{-2 \ln(A_H)}{\ln \left[1 + \left(\frac{1}{2^n - 1} \right) \Omega_H^2 \right]}$$

$n := \text{suchen}(n) \quad n = 2.701 \quad \text{ceil}(n) = 3 \quad \text{min. notwendige Filterordnung}$

Charakteristisch für das Filter mit kritischer Dämpfung ist, dass die Übertragungsfunktion $G(s)$ nur Pole auf der reellen Achse aufweist, und zwar ein n -facher Pol für einen Tiefpass der Ordnung n :

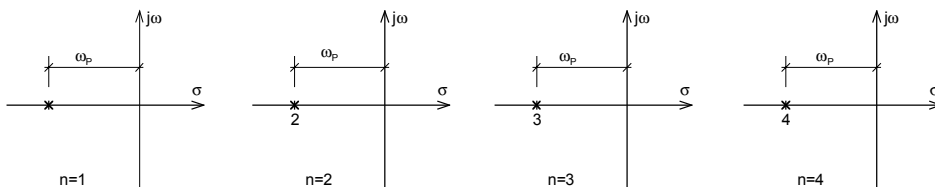


Bild 2-9:

Filter mit kritischer Dämpfung haben Pole ausschliesslich auf der reellen Achse

Soll ein Tiefpass mit kritischer Dämpfung mit quadratischen Gliedern realisiert werden, werden die Koeffizienten b_i der Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{1}{(1 + a_1 s)^n} = \frac{1}{(1 + a_1 s_1)(1 + a_1 s_2) \dots (1 + a_1 s_n)} = \frac{1}{(1 + b_1 s_1 + b_2 s_1^2) \dots (1 + b_1 s_{\frac{n}{2}} + b_2 s_{\frac{n}{2}}^2)} \quad (n = \text{gerade}) \quad (2-6)$$

$$a_1 = \sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1} \quad b_1 = 2a_1 \quad b_2 = 2^{\frac{1}{n}} - 1$$

Bei ungerader Ordnung wird zuvor ein linearer Faktor abgespalten. Diese Form erlaubt eine bequeme Implementierung mit quadratischen Teilfiltern, so dass der Schaltungsaufwand erheblich reduziert werden kann. Eine Zerlegung in quadratische Glieder ist aus Stabilitätsgründen sinnvoll, kann immer erfolgen. Bei Filtern ungerader Ordnung wird zuvor ein linearer Faktor abgespalten. Ein Tiefpassfilter kann daher allgemein als Produkt quadratischer Glieder formuliert werden:

$$G(s) = \frac{A_0}{\prod_{i=1}^n (1 + b_{1i}s + b_{2i}s^2)} \quad A_0 = DC - \text{Verstärkung} \quad (2-7)$$

(Wobei durchaus ein b_{2i} Null sein darf.)

Die Sprungantwort von Filtern mit kritischer Dämpfung zeigen keine Überschinger. Durch Laplace-Rücktransformation findet man die allgemeine Formel für die Sprungantwort eines Tiefpass kritischer Dämpfung n -ter Ordnung:

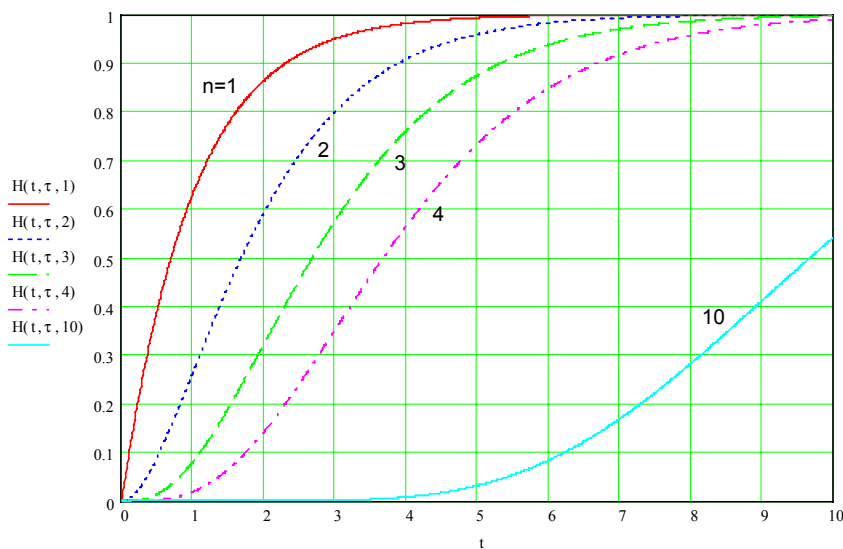
$$h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i! \cdot \tau^i} \quad (2-8)$$

Die grafische Darstellung der Sprungantwort normierter Tiefpassfilter mit kritischer Dämpfung wird:

$$H(t, \tau, n) := 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i! \cdot \tau^i} \quad \text{Sprungantwort TP mit kritischer Dämpfung der Ordnung } n.$$

$t := 0, 0.01..10 \quad \tau := 1$

Sprungantworten normierter Filter mit kritischer Dämpfung der Ordnung 1..4 und 10:



Beispiel 2-2: (Filter mit kritischer Dämpfung 4. Ordnung)

Man bestimme die Filterkoeffizienten der quadratischen Teilfilter für kritische Dämpfung 4. Ordnung bei einer -3dB-Grenzfrequenz von 2kHz. Der resultierende Amplitudengang ist als Graph darzustellen.

Lösung:

Vorgaben:

$$f_C := 2 \cdot 10^3 \text{ [Hz]}$$

$$n := 4 \quad \text{ORIGIN} := 1$$

$$G(s, b_1, b_2) := \frac{1}{\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (1 + b_{1_i} \cdot s + b_{2_i} s^2)} \quad \text{Übertragungsfunktion Tiefpassfilter mit quadratischen Gliedern}$$

Berechnungen:

normierte Pollagen

$$i := 1..n$$

$$a_i := \sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1}$$

$$a = \begin{pmatrix} 0.435 \\ 0.435 \\ 0.435 \\ 0.435 \end{pmatrix} \quad s_p := -a$$

$$s_p = \begin{pmatrix} -0.435 \\ -0.435 \\ -0.435 \\ -0.435 \end{pmatrix}$$

Quadr. Glieder:

$$j := 1.. \frac{n}{2} \quad (\text{n muss gerade sein!})$$

$$b_{1_j} := 2a_{2j-1}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0.87 \\ 0.87 \end{pmatrix}$$

$$b_{2_j} := 2^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0.189 \\ 0.189 \end{pmatrix}$$

Koeffizienten auf Grenzfrequenz skalieren:

$$\omega_C := 2\pi \cdot f_C$$

$$b_1 := \frac{b_1}{\omega_C}$$

$$b_2 := \frac{b_2}{\omega_C^2}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 6.923 \times 10^{-5} \\ 6.923 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1.198 \times 10^{-9} \\ 1.198 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

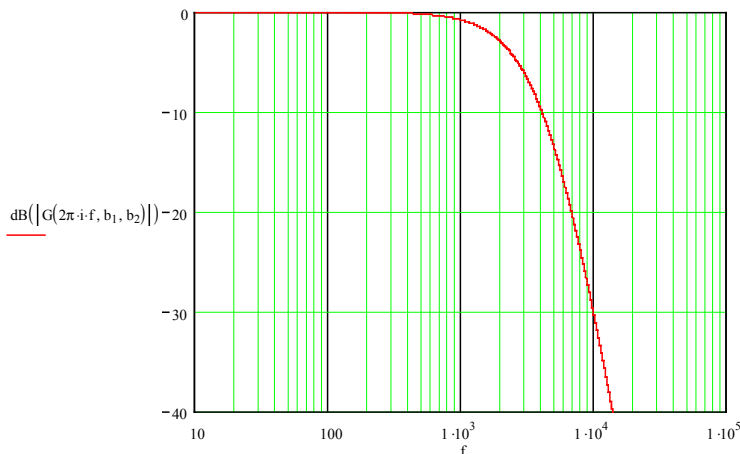
Kontrolle -3dB Punkt:

$$\text{dB}(x) := 20 \cdot \log(x)$$

$$\text{dB}(|G(2\pi \cdot i \cdot f_C, b_1, b_2)|) = -3.01$$

Grafische Darstellung:

$$f := 10, 15.. 100000$$



2.6.2 Butterworth Tiefpässe (Potenz-Filter)

Sie verlaufen maximal flach bis zur Grenzfrequenz um dann mit $n \cdot 20\text{dB/Dek}$ asymptotisch abzufallen. Das Butterworth-Filter hat daher wesentlich bessere Dämpfungseigenschaften im Durchlassbereich als ein Filter mit kritischer Dämpfung:

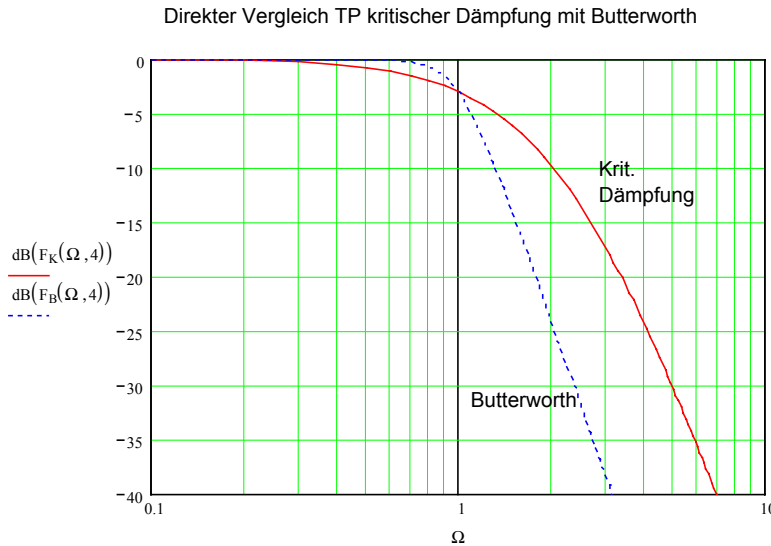


Bild 2-10: Vergleich Amplitudengang Butterworth mit kritischer Dämpfung bei einem Filter 4. Ordnung. Man erkennt den wesentlich flacheren Verlauf im Durchlassbereich beim Butterworth Filter.

Der Amplitudengang, Pollage und minimale Filterordnung des Butterworth-Tiefpass lauten:

$$|F(\Omega)| = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}} \quad (2-9)$$

$$S_p = -\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) + j\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \quad k = 1 \dots n \quad \text{Butterworth Tiefpass} \quad (2-10)$$

$$n \geq \frac{\ln(10^{0.1 \cdot A_{HdB}} - 1)}{2 \ln(\Omega_H)} \quad \Omega_H = \frac{f_H}{f_C} \quad A_{HdB} = \text{Sperrdämpfung (pos. Wert)} \quad (2-11)$$

Die Pole S_p liegen auf dem linken Einheitskreis. Ein TP-Filter gerader Ordnung n hat daher $n/2$ konjugiert komplexe Polpaare. Ein Filter ungerader Ordnung hat einen reellen Pol und $(n-1)/2$ konjugiert komplexe Polpaare. Die kreisförmige Polanordnung ist für das Butterworth-Filter charakteristisch.

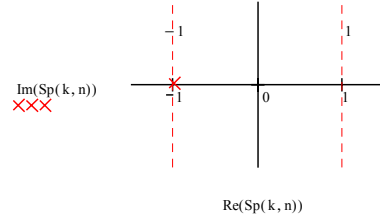
Normierte Pole von Butterworth-Tiefpässen der Ordnung 1..5:

$j := \sqrt{-1}$ $Sp(k, n) := -\sin\left(\frac{1 + 2 \cdot k}{2 \cdot n} \pi\right) + j \cdot \cos\left(\frac{1 + 2 \cdot k}{2 \cdot n} \pi\right)$ Normierte Pollagen von Butterworth Tiefpässen der Ordnung n.

$n := 1$ $k := 0..n - 1$

$Sp(k, n) =$

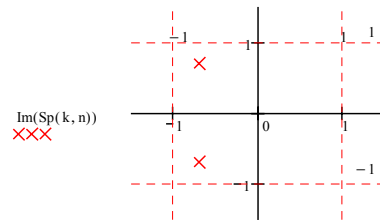
-1



$n := 2$ $k := 0..n - 1$

$Sp(k, n) =$

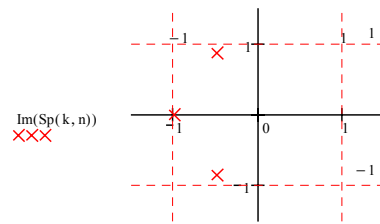
-0.707+0.70j
-0.707-0.70j



$n := 3$ $k := 0..n - 1$

$Sp(k, n) =$

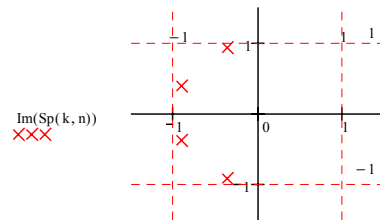
-0.5+0.866j
-
-0.5-0.866j



$n := 4$ $k := 0..n - 1$

$Sp(k, n) =$

-0.383+0.924j
-0.924+0.383j
-0.924-0.383j
-0.383-0.924j



$n := 5$ $k := 0..n - 1$

$Sp(k, n) =$

-0.309+0.951j
-0.809+0.588j
-
-0.809-0.588j
-0.309-0.951j

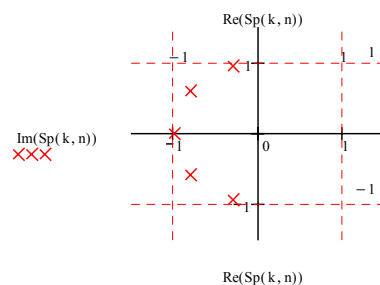


Bild 2-11:
 Polfrequenzen und grafische Darstellung der Pollage in der komplexen Zahlenebene beim normierten Butterworth-Tiefpass.

Die Polfrequenz ist per Definition der Betrag der Pollage. Die Polgüte die Hälfte des negativen Realteiles:

$\Omega_{Pi} = |S_{Pi}|$ $i = 1...n/2$ **Polgüte** (2-12)

$Q_{Pi} = \frac{-\Omega_{Pi}}{2\text{Re}(S_{Pi})}$ $i = 1...n/2$ **Polfrequenz** (2-13)

Die Polfrequenz des normierten Butterworth-TP ist daher immer 1.

Begründung der Butterworth-Approximation

Die Forderung nach maximal flachem Durchlass und möglichst steilem Abfall ohne Welligkeit im Sperrbereich mit einer Übertragungsfunktion der Art:

$$G(S) = \frac{1}{1 + a_1 S + a_2 S^2 + \dots + a_n S^n} \quad (2-14)$$

Der normierte Amplitudengang folgt daraus:

$$|F(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{(1 - a_2 \Omega^2 + a_4 \Omega^4 + \dots)^2}_{\text{Re}} + \underbrace{(a_1 \Omega - a_3 \Omega^3 + a_5 \Omega^5 + \dots)^2}_{\text{Im}}}} \quad (2-15)$$

Fasst man die Koeffizienten für die gleichen Potenzen zusammen und nennt die so neu entstandenen Koeffizienten A_p , erhält man den Amplitudengang:

$$|F(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + A_2 \Omega^2 + A_4 \Omega^4 + \dots + A_{2n} \Omega^{2n}}} \quad (2-16)$$

Der Amplitudengang wird maximal flach, wenn das Übertragungsverhalten nur durch das Glied mit dem grössten Exponent bestimmt wird. Die Forderung, dass unabhängig von der Filterordnung bei $\Omega=1$ der -3.01dB -Punkt erreicht wird, wird durch den Leitkoeffizienten A_{2n} bestimmt. Aus dieser Forderung folgt $A_{2n}=1$ und zwar für jede Filterordnung.

Daher gilt für den normierten Amplitudengang des Butterworth-Tiefpass:

$$|F(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}} \quad n: \text{Filterordnung} \quad (2-17)$$

Die Koeffizientenbestimmung kann für die Übertragungsfunktion nach Gl. (2-14) kann durch Koeffizientenvergleich als allgemeine Lösung erfolgen:

$$\begin{aligned} |G(S)|_{S=j\Omega} &= |F(\Omega)|_{\Omega=-jS} \\ \left| \frac{1}{1 + a_1 S + a_2 S^2 + \dots + a_n S^n} \right| &= \frac{1}{\sqrt{1 + (-jS)^{2n}}} \end{aligned} \quad (2-18)$$

Die Gleichung ist erfüllt wenn auf beiden Seiten dieselben Nennernullstellen gelten. Daher wird die Lösung:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (-jS_p)^{2n}} &= 0 & \rightarrow & -1 = (-jS_p)^{2n} \\ \sqrt[2n]{-1} = -jS_{pk} &= -\sin\left(\frac{1+2k}{2n}\pi\right) + j\cos\left(\frac{1+2k}{2n}\pi\right) & k &= 0..2n-1 \end{aligned} \quad (2-19)$$

Alle Pole S_{pk} liegen auf dem Einheitskreis. Da durch das quadrieren doppelt so viele Lösungen entstanden sind werden nur die Lösungen mit negativem Realteil berücksichtigt. Die entspricht dem Index $k=0..n-1$:

$$S_{pk} = -\sin\left(\frac{1+2k}{2n}\pi\right) + j\cos\left(\frac{1+2k}{2n}\pi\right) \quad k = 0..n-1 \quad \text{Butterworth-Pole} \quad (2-20)$$

Begründung: Minimal notwendige Filterordnung

Die für eine bestimmte Sperrforderung A_H bei einer Frequenz f_H lässt sich für den Tiefpass mit einer DC-Verstärkung (oder -Dämpfung) A_0 direkt auf der Formel für den Amplitudengang ableiten:

$$A_H = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \Omega_s^{2n}}} \quad \Omega_s = \frac{f_H}{f_c}$$

$$A_H^2 = \frac{A_0^2}{1 + \Omega_s^{2n}} \quad \rightarrow \quad \Omega_s^{2n} = \frac{A_0^2}{A_H^2} - 1 = \left(\frac{A_0}{A_H}\right)^2 - 1 \quad \rightarrow \quad 2n \cdot \ln(\Omega_s) = \ln\left(\left(\frac{A_0}{A_H}\right)^2 - 1\right)$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\left(\frac{A_0}{A_H}\right)^2 - 1\right)}{2 \cdot \ln\left(\frac{f_H}{f_c}\right)}$$

Minimal notwendige Filterordnung Butterworth (2-21)

Verhalten der Butterworth-Filter im Zeitbereich

Die Sprungantwort der Butterworth-Filter zeigt ein leichtes Überschwingen, dass mit steigender Filterordnung wächst:

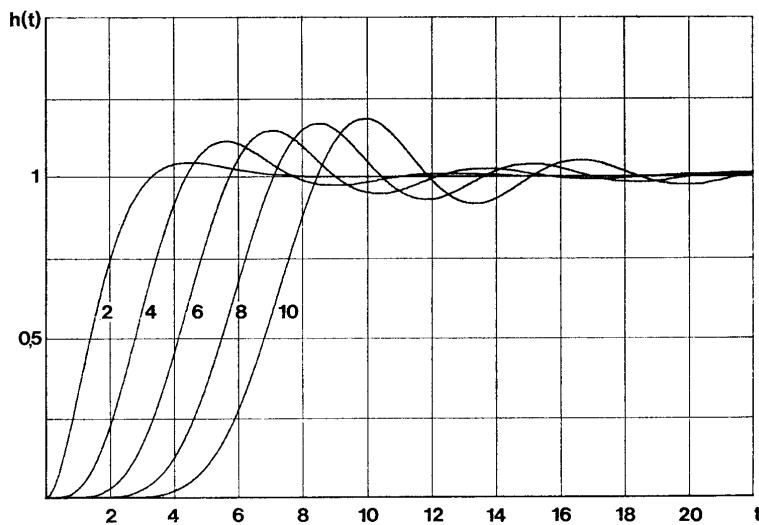


Bild 2-12:
 Sprungantwort normierter Butterworth-Tiefpässe.

Quelle: [HER84]

Allgemein kann die Sprungantwort durch Laplace-Rücktransformation der Übertragungsfunktion, multipliziert mit dem Einheitssprung, bestimmt werden.

$$h(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{S} \cdot G(S)\right)$$

Es existiert aber keine allgemeine Lösung für alle Filterordnungen.

Gruppenlaufzeit Butterworth-Filter

Die Gruppenlaufzeit beschreibt die Durchlaufzeit der Signale durch das Filter. Sie ist im Regelfall frequenzabhängig und sollte für ein gutes Impulsverhalten im Durchlassbereich möglichst konstant sein. Die Gruppenlaufzeit ist definiert:

$$t_{gr} = -\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{T_{gr}}{2\pi f_c} \tag{2-22}$$

$$\tau = T_{gr} = -\frac{d\varphi}{d\Omega} \tag{2-23}$$

Gruppenlaufzeit
Normierte Gruppenlaufzeit

Die grafische Darstellung zeigt im Bereich der Grenzfrequenz eine leichte Überhöhung. Das Impulsverhalten ist daher nicht so gut wie ein Bessel- oder Gauss-Filter:

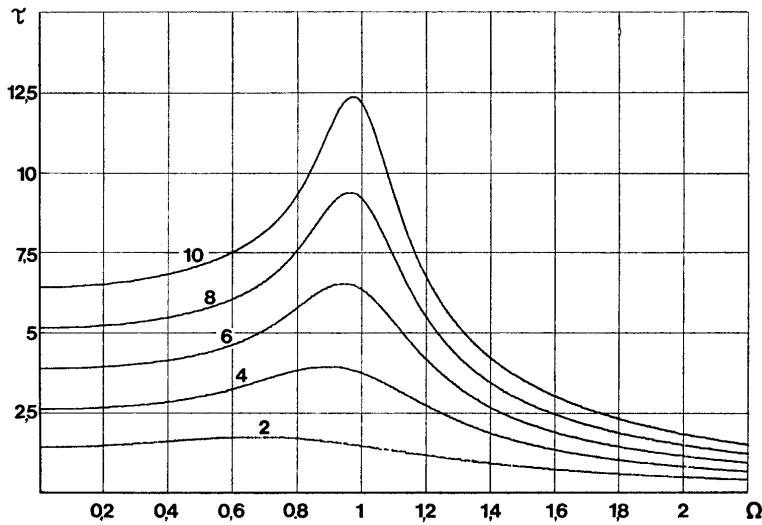


Bild 2-13:
 Normierte Gruppenlaufzeit von Butterworth-Tiefpässen.

Quelle: [HER84]

Beispiel 2-3: Gruppenlaufzeit Butterworth 4. Ordnung

Man bestimme die Durchlaufzeit eines Signals von $f_1=500\text{Hz}$ und $f_2=9\text{kHz}$ bei einem Butterworth-TP 4.Ordnung mit Grenzfrequenz $f_c=10\text{kHz}$:

Lösung:

Die normierten Frequenzen werden berechnet und damit aus der Grafik die normierte Gruppenlaufzeiten gelesen und entnormiert:

$f_1 := 500 \text{ [Hz]}$ $f_2 := 9 \cdot 10^3 \text{ [Hz]}$ $f_c := 10 \cdot 10^3 \text{ [Hz]}$

$\Omega_1 := \frac{f_1}{f_c}$ $\Omega_1 = 0.05$

$\Omega_2 := \frac{f_2}{f_c}$ $\Omega_2 = 0.9$

$T_{gr2} := 3.8$
 (Werte aus Tabelle gelesen)

$T_{gr1} := 2.6$

$t_{gr1} := \frac{T_{gr1}}{2\pi f_c}$ $t_{gr1} = 4.138 \times 10^{-5} \text{ [s]}$

$t_{gr2} := \frac{T_{gr2}}{2\pi f_c}$ $t_{gr2} = 6.048 \times 10^{-5} \text{ [s]}$

2.6.3 Bessel-Filter (Thomson-Filter)

Sie wurden durch W.E. Thomson 1949 als *maximal flat delay filter* vorgestellt. Filter mit Bessel-Charakteristik haben ein ausgezeichnetes Impulsverhalten, da die Gruppenlaufzeit im Durchlassbereich konstant ist. Sie zeigen daher kein Überschwingen in der Sprungantwort. Die Flankensteilheit ist aber etwas schlechter als bei Butterworth-Filtern.

Bessel-Filter werden bei hohen Anforderungen an Phasenlinearität und Impulsverhalten verwendet. Der Phasengang ist absolut frequenzproportional.

Bessel-Approximation

Der Ansatz zur Koeffizientenbestimmung erfolgt über die Forderung, dass unterhalb der Grenzfrequenz die Gruppenlaufzeit möglichst wenig von der Frequenz ω abhängt.

Dies ist gegeben, wenn die (normierte) Übertragungsfunktion im Nenner durch ein Bessel-Polynom dargestellt wird:

$$G(s) = \frac{1}{PB(n)} \quad PB(n) = \frac{\sum_{k=0}^n b_{k,n} \cdot s^k}{b_{0,n}} \quad n : \text{Polynomgrad} \geq 1 \quad (2-24)$$

$$b_{k,n} = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k} \cdot k! \cdot (n-k)!}$$

Die Bessel-Polynome werden für $n=1..5$ konkret:

n	$PB(n)$
1	$1+s^2$
2	$1+s+\frac{1}{3}s^2$
3	$1+s+\frac{6}{15}s^2+\frac{1}{15}s^3$
4	$1+s+\frac{45}{105}s^2+\frac{10}{105}s^3+\frac{1}{105}s^4$
5	$1+s+\frac{420}{945}s^2+\frac{105}{945}s^3+\frac{15}{945}s^4+\frac{1}{945}s^5$

Die Pole werden durch Bestimmen der Nullstellen der Bessel-Polynome bestimmt. Daher existiert auch keine einfache Formel zur Berechnung der Pole weil zusätzlich noch Korrekturen für eine 3-dB Normierung notwendig sind. Weil die Leitkoeffizienten für höhere Ordnungen sehr klein sind ist die präzise numerische Bestimmung der Nullstellen anspruchsvoll. In der Praxis wird deshalb meist mit tabellierten Werten gearbeitet.

Beispiel 2-4: Berechnung Pole Bessel-Normtiefpass

Für ein Bessel-Tiefpass 3. Ordnung sind die normierten Pole zu bestimmen.

Lösung:

Formal:
$$b(k,n) := \frac{(2 \cdot n - k)!}{2^{n-k} \cdot k! \cdot (n - k)!}$$
 Koeffizienten des normierten Besselpolynom mit Grad n.

$$P_B(s, n) := \sum_{k=0}^n (b(0, n)^{-1} \cdot b(k, n) \cdot s^k)$$
 Bessel-Polynom vom Grad n

Nicht 3dB-Normierte Besselkoeffizienten und Pole

n := 3

i := 0..n

besselkoeff_i := b(i, n)

Sp := nullstellen(besselkoeff)
$$Sp = \begin{pmatrix} -2.32219 & \\ -1.83891 + 1.75438i & \\ -1.83891 - 1.75438i & \end{pmatrix}$$

$$\text{besselkoeff} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein Vergleich mit den tabellierten Werten zeigt andere Pole. Dies rührt daher, dass mit der Definition (2-24) nur für das Filter 1. Ordnung der -3dB Punkt bei $\Omega=1$ liegt:

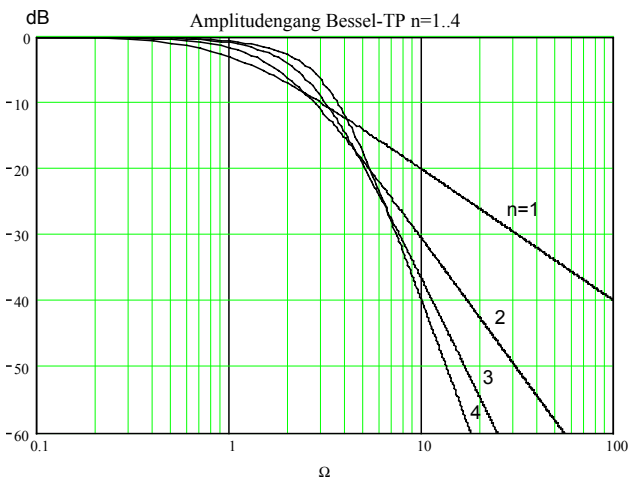


Bild 2-14: Amplitudengang von nicht 3-dB-korrigierten Bessel-Tiefpässen mit Koeffizienten gemäss Gl.(2-24).

Damit für alle Filterordnungen bei $\Omega=1$ der -3dB erreicht wird, müssen bei Filter mit Ordnung > 2 die Pole mit einem Korrekturfaktor umgerechnet werden:

$$S_{P3dB} = \frac{S_P}{k}$$

Der Korrekturfaktor k wird ordnungsabhängig:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	1	0.7344	0.56958	0.47306	0.41196	0.36991	0.33878	0.3145	0.29484	0.27838

Tabelle 1

Faktoren für 3-dB-Korrektur bei Bessel-Tiefpässen.

Dieser Korrekturfaktor k entspricht dem Kehrwert der normierten Gruppenlaufzeit bei $\Omega=0$. Mit den so korrigierten Polwerten erhalten wir für alle Filterordnungen eine -3dB-Grenzfrequenz bei $\Omega=1$:

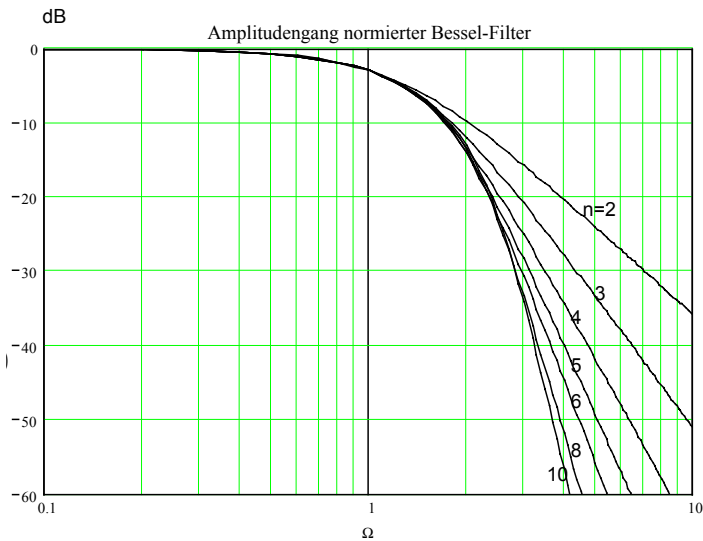


Bild 2-15:
 Amplitudengang von normierten Bessel-Tiefpässen mit 3-dB-korrigierten Koeffizienten

Zeit- und Laufzeitverhalten

Bessel-Filter haben im Durchlassbereich konstante Gruppenlaufzeit und kein Überschwingen in der Sprungantwort. Die grafische Darstellung der normierten Gruppenlaufzeit und Sprungantwort werden:

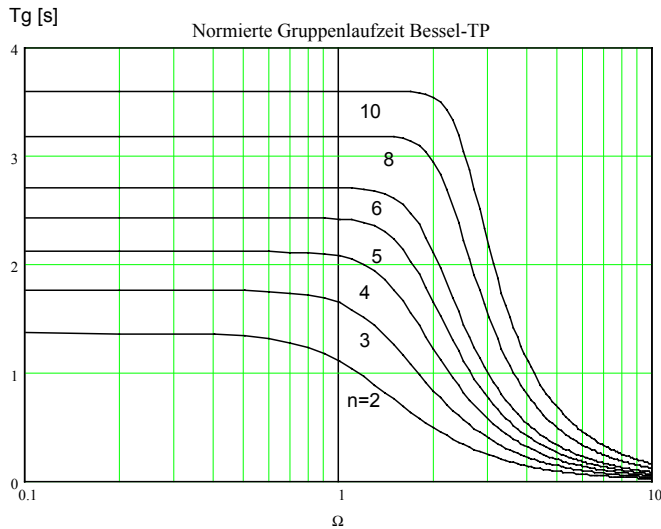


Bild 2-17:
 Normierte Gruppenlaufzeiten von Bessel-Tiefpässen.

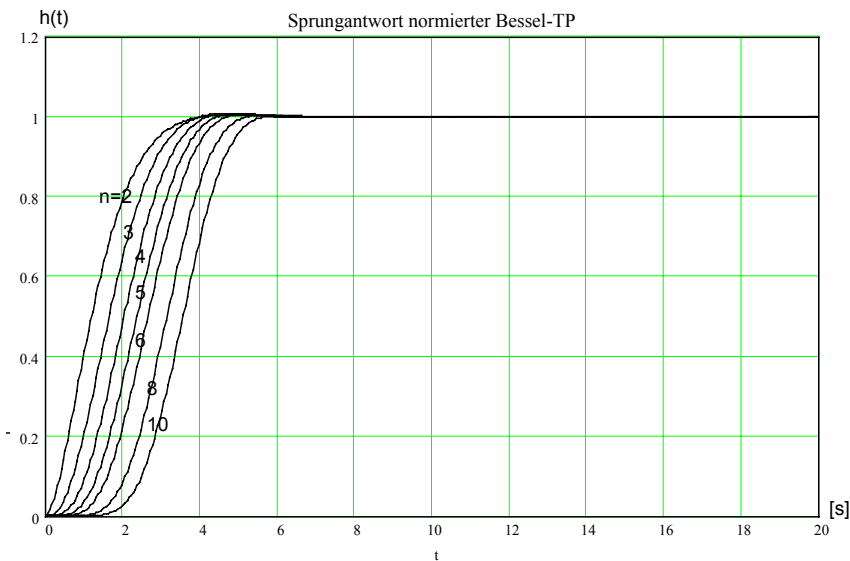


Bild 2-16:
 Normierte Sprungantwort von Bessel-Tiefpässen. Sie zeigen überhaupt kein Überschwingen und zeigen daher optimales Impulsverhalten.

Beispiel 2-5: Durchlaufzeit beim Bessel-Tiefpass

Man bestimme die Durchlaufzeit eines Signals von 2kHz bei einem Bessel-Tiefpass 6. Ordnung mit einer Grenzfrequenz von 4 kHz.

Lösung:

Aus dem Graphen für die normierte Gruppenlaufzeit liest man für $n=6$ und $\Omega=0.5$: $T_G=2.7$. Alternativ kann T_G auch über den Kehrwert für $k=6$ berechnet werden. Mit Gl. (2-23) wird die Laufzeit:

$$T_G(\omega) = \frac{T_G(\Omega)}{\omega_C} \quad \rightarrow \quad t_g = \frac{T_G(0.5)}{2\pi \cdot f_C} = \frac{2.703}{2\pi \cdot 2000} = 215.01 \mu s$$

Beispiel 2-6: Dimensionierung Bessel-Tiefpass 3. Ordnung

Anforderungen: Grenzfrequenz $f_C=1\text{kHz}$, Sperrdämpfung $A_H=20\text{dB}$ bei 3kHz. Realisation mit quadratischem Teilfilter mit Mehrfach-Gegenkopplung. Die Kondensatoren sind 1/10/100nF kleinstmöglich zu wählen.

Lösung:

Notwendige Filterordnung bestimmen, indem mit Ω_H im Graphen in Bild 2-15 die minimal notwendige Filterordnung n bestimmt wird:

$$\Omega_H = \frac{\omega_H}{\omega_C} = \frac{3000}{1000} = 3 \quad \rightarrow \quad n = 3$$

Die Dimensionierung erfolgt für das quadratische Glied direkt mit Polfrequenz und Polgüte. Die normierten Werte werden aus der Tabelle gelesen und direkt in die Dimensionierungsformeln eingesetzt.

Vorgaben: $f_C := 1 \cdot 10^3$ [Hz] $A_0 := -1$ (Wahl)
 $C := 1 \cdot 10^{-9}$ [F]

Aus der Tabelle werden die Polfrequenzen und Polgüten:

$$\Omega_{PT} := \begin{pmatrix} 1.32267580 \\ 1.44761713 \end{pmatrix} \quad Q_{PT} := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6910466 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Elementwerte: (Lineares Glied)

$$\omega_C := 2\pi \cdot f_C$$

$$\Omega_P := \Omega_{PT_0} \quad \Omega_P = 1.323$$

$$R := \frac{1}{\Omega_P \cdot \omega_C \cdot C} \quad R = 1.203 \times 10^5 \quad [\Omega]$$

Berechnung der Elementwerte: (Quadratisches Glied)

$$\Omega_P := \Omega_{PT_1} \quad \Omega_P = 1.448$$

$$Q_P := Q_{PT_1} \quad Q_P = 0.691$$

$$C_5 := C$$

$$C_3 := 4 \cdot Q_P^2 \cdot (1 + |A_0|) \cdot C_5 \quad C_3 = 3.82 \times 10^{-9} \quad C_3 := 10 \cdot 10^{-9} \quad (\text{Wahl})$$

(1. Wahlmöglichkeit)

$$R_{21} := \frac{C_3 + \sqrt{C_3^2 - 4 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot (1 + |A_0|)} \cdot Q_p^2}{2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot Q_p \cdot \Omega_p \cdot \omega_C} \quad R_{21} = 1.421 \times 10^5 \quad [\Omega]$$

$$R_{41} := \frac{1}{R_{21} \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot \Omega_p^2 \cdot \omega_C^2} \quad R_{41} = 8.507 \times 10^3 \quad [\Omega]$$

$$R_{11} := \frac{R_{21}}{-A_0} \quad R_{11} = 1.421 \times 10^5 \quad [\Omega]$$

(2. Wahlmöglichkeit)

$$R_{22} := \frac{C_3 - \sqrt{C_3^2 - 4 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot (1 + |A_0|)} \cdot Q_p^2}{2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot Q_p \cdot \Omega_p \cdot \omega_C} \quad R_{22} = 1.701 \times 10^4 \quad [\Omega]$$

$$R_{42} := \frac{1}{R_{22} \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot \Omega_p^2 \cdot \omega_C^2} \quad R_{42} = 7.104 \times 10^4 \quad [\Omega]$$

$$R_{12} := \frac{R_{22}}{-A_0} \quad R_{12} = 1.701 \times 10^4 \quad [\Omega]$$

Wahl: $R_1 := R_{11}$ $R_2 := R_{21}$ $R_4 := R_{41}$

Grafik:

$$\text{dB}(x) := 20 \cdot \log(x) \quad j := \sqrt{-1}$$

$$G_2(s, R_1, R_2, C_3, R_4, C_5) := \frac{-R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{R_2 \cdot R_4}{R_1} + R_2 + R_4 \right) \cdot C_5 \cdot s + R_2 \cdot R_4 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot s^2}$$

$$G_1(s, R, C) := \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C}$$

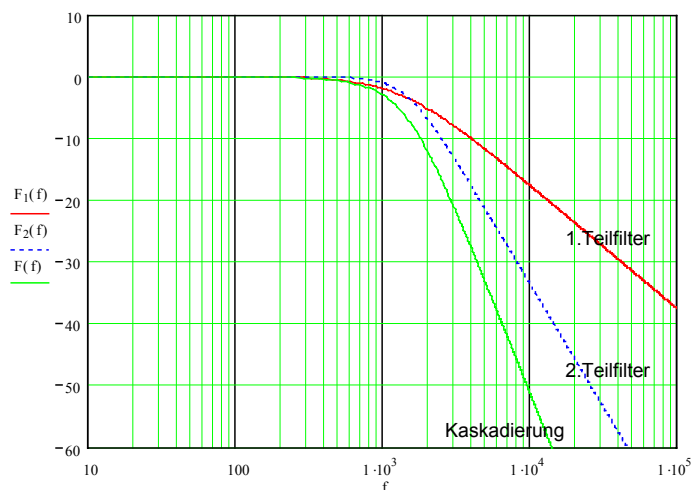
$$F_1(f) := \text{dB} \left(\left| G_1(\tilde{f} 2\pi \cdot j, R, C) \right| \right) \quad \text{Amplitudengang 1. Teilfilter}$$

$$F_2(f) := \text{dB} \left(\left| G_2(\tilde{f} 2\pi \cdot j, R_1, R_2, C_3, R_4, C_5) \right| \right) \quad \text{Amplitudengang 2. Teilfilter}$$

$$F(f) := F_1(f) + F_2(f) \quad \text{Amplitudengang Kaskadierung}$$

f := 10, 50.. 100000

Kaskadierter Bessel-TP 3. Ordnung



Kontrolle der Dämpfung bei Grenzfrequenz:

$$F(1000) = -3.01 \quad [\text{dB}]$$

2.6.4 Tschebyscheff-Filter

Tschebyscheff-Filter lassen im Durchlassbereich eine definierte Welligkeit zu. Im Gegenzug werden bessere Selektivitätseigenschaften, d.h. grössere Flankensteilheit, erreicht. Mit Tschebyscheff-Charakteristik lassen sich maximal steile Filter realisieren, wenn keine Welligkeit im Sperrbereich zugelassen wird.

Die Gruppenlaufzeitkonstanz und damit das Impulsverhalten sind wegen der Welligkeit wesentlich schlechter. Für normale Anforderungen stellen Tschebyscheff-Filter aber den Standard dar, da sie eine ordnungsminimale Realisation mit einfachen Schaltungen erlauben.

Tschebyscheff-Approximation

Die Tschebyscheff Amplitudencharakteristik wird erreicht, wenn die (normierte) Übertragungsfunktion im Nenner durch ein Tschebyscheff-Polynom dargestellt wird. Der Amplitudengang wird dann:

$$|F(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon \cdot T_n(\Omega))^2}} \quad \begin{array}{l} \varepsilon : \text{Welligkeitsfaktor} \\ T_n(s) : \text{Tschebyscheff-Polynom der Ordnung } n \end{array} \quad (2-25)$$

Der Welligkeitsfaktor ε definiert zulässige Welligkeit im Durchlassbereich. Die Tschebyscheff-Polynome sind rekursiv definiert und werden für $n=1..5$ konkret:

$$T_{n+1}(\Omega) = 2\Omega T_n(\Omega) - T_{n-1}(\Omega) = \begin{cases} \cos(n \cdot \arccos(\Omega)) & \Omega \leq 1 \\ \cosh(n \cdot \operatorname{arccosh}(\Omega)) & \Omega > 1 \end{cases} \quad (2-26)$$

n	$T_n(s)$
1	Ω
2	$2\Omega^2 - 1$
3	$4\Omega^3 - 3\Omega$
4	$8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$
5	$16\Omega^5 - 20\Omega^3 + 5\Omega$

Die allgemeine Definition mit cos/cosh entsteht aus der Lösung der zugehörigen Differenzialgleichung. Sie bildet auch die Grundlage zur einfachen Bestimmung der Pole und Koeffizienten für die Dimensionierung.

Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome

Tschebyscheff-Polynome oszillieren im Bereich [-1,1] mit einer definierten Amplitude dann für $n > 0$ streng monoton anzusteigen:

$$T(\Omega, n) := \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ \Omega & \text{if } n = 1 \\ 2 \cdot \Omega \cdot T(\Omega, n - 1) - T(\Omega, n - 2) & \text{otherwise} \end{cases}$$

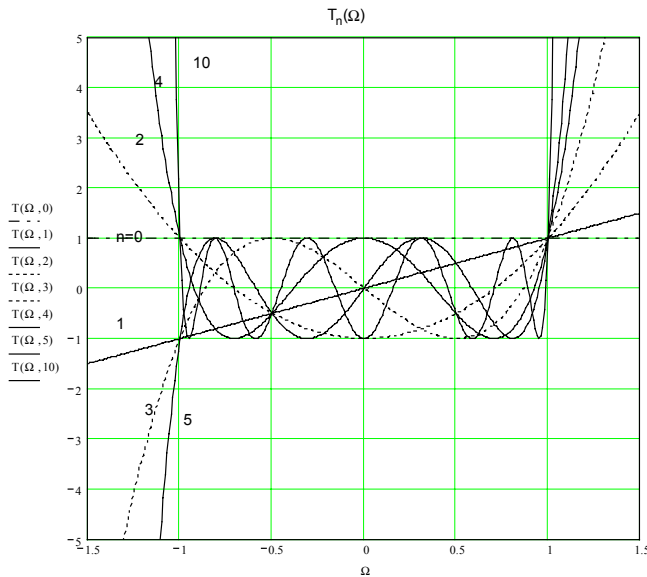


Bild 2-18: Funktionsverlauf der Tschebyscheff-Polynome vom Grad 0..5 und 10.

Aus mathematischer Sicht hat $T_n(\Omega)$ die Eigenschaften:

1. $T_n(1) = 1$
2. $T_n(\Omega)$ ist gerade (ungerade), wenn n gerade (ungerade)
3. $T_n(\Omega)$ schwingt zwischen +1 in [-1,+1]
4. $T_n(\Omega)$ hat alle Nullstellen in (-1,+1)
5. $T_n(\Omega)$ hat den Grad n

Tschebyscheff-Filter haben bei gleicher Filterordnung eine grössere Flankensteilheit als Butterworth-, Bessel- oder Filter mit kritischer Dämpfung.

Per Definition liegt bei Tschebyscheff-Filtern (und anderen Filtern mit Welligkeit im Durchlassbereich) die -3dB-Frequenz nicht mehr bei $\Omega=1$. Die Grenzfrequenz wird dort definiert, wo die Welligkeit erstmals überschritten wird. Ein Tschebyscheff-Filter mit 0.1dB Welligkeit hat bei der Grenzfrequenz eine Dämpfung von 0.1dB.

Pole des normierten Tschebyscheff-Tiefpass

Durch Bestimmen der Nenner-Nullstellen der Übertragungsfunktion kann eine allgemeine Lösung zur Berechnung der Pole für normierte Tschebyscheff-Tiefpassfilter gefunden werden:

$$\epsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{rdB}}{10}} - 1} \quad A_{rdB} : \text{Welligkeit im Durchlassbereich [dB]} \quad (2-27)$$

$$S_p = -\sin\left(\frac{1+2k}{2n}\pi\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) + j \cos\left(\frac{1+2k}{2n}\pi\right) \cdot \cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) \quad (2-28)$$

n : Filterordnung
 k : 0...n-1

Die Pole liegen geometrisch auf einer Ellipse. Je kleiner der Wert der kleinen Halbachse, desto grösser die Welligkeit und damit die Flankensteilheit.

Pole von normierten Tschebyscheff-Tiefpässen der Ordnung 1..5:

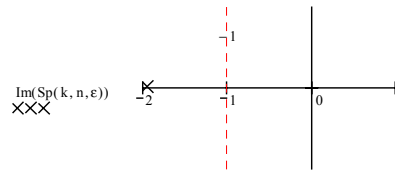
$$Sp(k, n, \epsilon) := -\sin\left(\frac{1 + 2 \cdot k}{2 \cdot n} \pi\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) + j \cdot \cos\left(\frac{1 + 2 \cdot k}{2 \cdot n} \pi\right) \cdot \cosh\left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$$

$$\epsilon := \sqrt[10]{\frac{A_{\text{rdB}}}{10} - 1} \quad A_{\text{rdB}} := 1 \quad (1 \text{ dB Welligkeit}) \quad \epsilon = 0.509$$

n := 1 k := 0..n - 1

Sp(k, n, ε) =

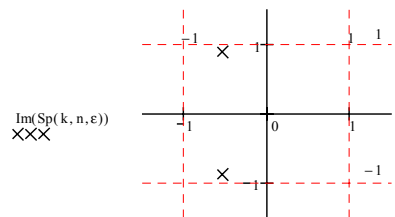
-1.965



n := 2 k := 0..n - 1

Sp(k, n, ε) =

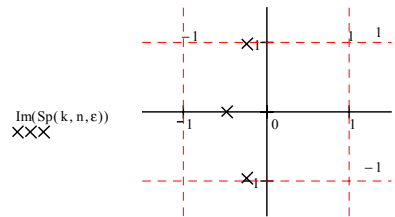
-0.549+0.895j
-0.549-0.895j



n := 3 k := 0..n - 1

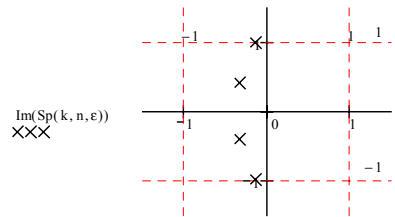
Sp(k, n, ε) =

-0.247+0.966j
-0.49j
-0.247-0.966j



n := 4 k := 0..n - 1

Sp(k, n, ε) =



n := 5 k := 0..n - 1

Sp(k, n, ε) =

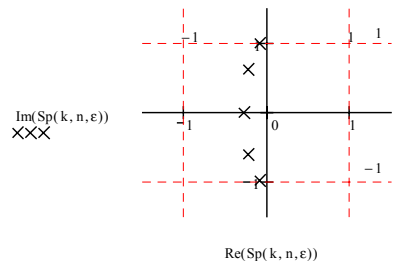


Bild 2-19: Normierte Pole von Tschebyscheff-Tiefpässen hier gezeigt am Beispiel mit Welligkeit $A_r=1\text{dB}$.

Der Amplitudengang wird für verschiedene Welligkeiten A_r und Ordnungen n :

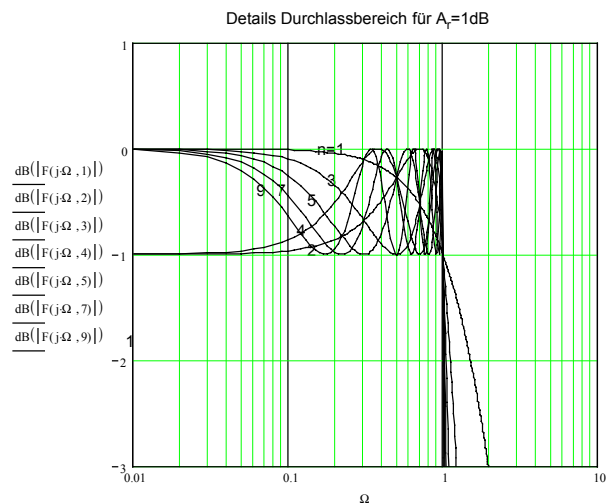
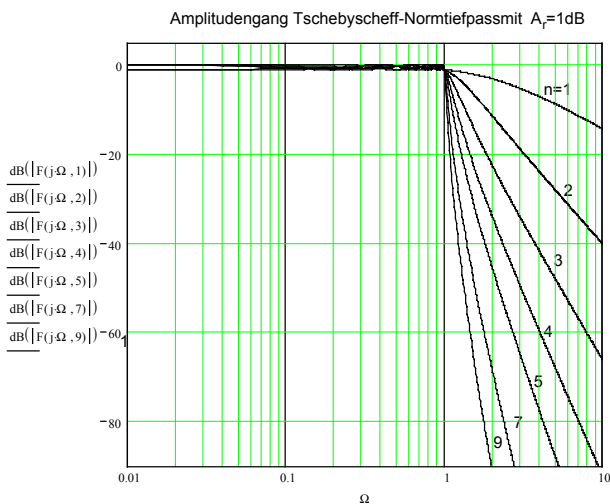
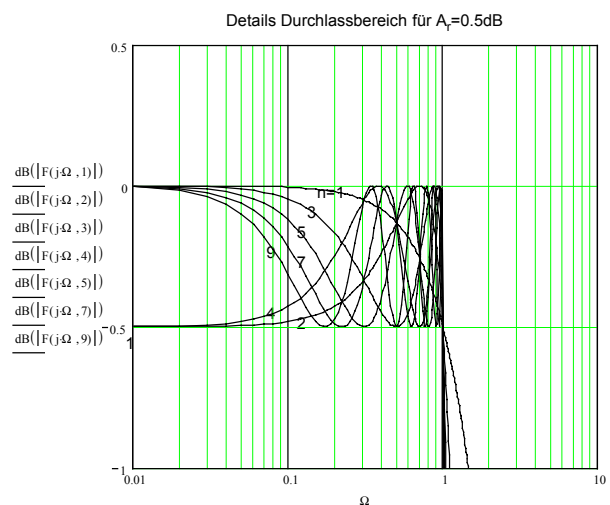
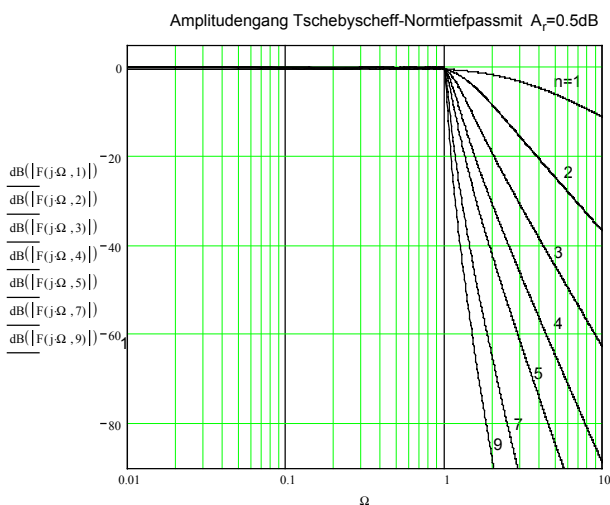
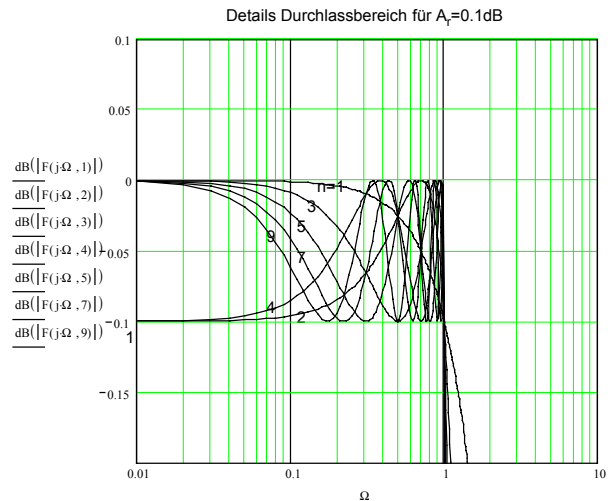
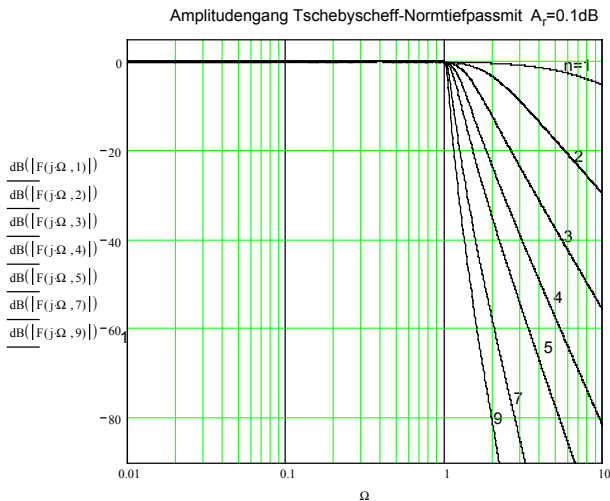


Bild 2-20:
 Amplitudengang normierter Tschebyscheff-Tiefpässe mit Welligkeiten von 0.1, 0.5 und 1dB mit
 Detailansicht der Welligkeit im Durchlassbereich.

Tschebyscheff-Tiefpässe gerader Ordnung weisen eine Anfangsdämpfung in der Grösse der Welligkeit auf. Weil diese mit passiven Filtern schwierig zu realisieren ist (mit reinen L-C Strukturen kann keine Anfangsdämpfung erreicht werden), wird für passive Tschebyscheff-Filter meist eine ungerade Ordnung gewählt. Bei Realisation mit aktiven Filtern stellt die Anfangsdämpfung kein Problem dar, weil gerade wie ungerade Ordnungen einfach realisiert werden können.

Minimale Filterordnung, -3-dB Frequenz

Die minimale notwendige Filterordnung kann durch Umformen der Gl. (2-25) mit (2-26) direkt bestimmt werden:

$$n \geq \frac{\operatorname{arcosh} \left(\sqrt{\frac{10^{\frac{A_H}{10}} - 1}{10^{\frac{A_r}{10}} - 1}} \right)}{\operatorname{arcosh}(\Omega_H)} = \frac{\operatorname{arcosh} \left(\sqrt{\frac{10^{\frac{A_H}{10}} - 1}{\epsilon^2}} \right)}{\operatorname{arcosh}(\Omega_H)}$$

Minimal notwendige Filterordnung Tschebyscheff

A_H : Sperrdämpfung in dB bei f_H (als positiver Wert)
 A_r : Welligkeit im Durchlass in dB
 Ω_H : $\frac{f_C}{f_H}$

(2-29)

Per Definition liegt bei Tschebyscheff-Filtern die Grenzfrequenz, wo die Welligkeit erstmals überschritten wird. Daher liegt die -3dB-Frequenz ausser für $A_r=3\text{dB}$ liegt nicht bei $\Omega=1$. Die 3dB-Frequenz kann aber allgemein aus Gl. (2-25) für das Tschebyscheff-Filter bestimmt werden:

$$f_{3dB} = f_C \cdot \cosh \left(\frac{\operatorname{arcosh} \left(\frac{1}{\epsilon} \right)}{n} \right)$$

f_C : Grenzfrequenz
 ϵ : Welligkeitsfaktor
 n : Filterordnung

-3dB Frequenz Tschebyscheff (2-30)

Beispiel 2-7: Minimal notwendige Filterordnung Tschebyscheff

Welche Ordnung muss ein Tschebyscheff-Filter mit Welligkeit 1dB und Grenzfrequenz 400Hz mindestens haben, wenn bei einer Frequenz von 800Hz eine Sperrdämpfung von 50dB erreicht werden soll?

Lösung:

Vorgaben: $f_C := 400$ [Hz] $A_r := 1$ [dB]
 $f_H := 800$ [Hz] $A_H := 50$ [dB]

Bestimmung der Filterordnung:

$$n := \frac{\operatorname{arcosh} \left(\sqrt{\frac{10^{\frac{A_H}{10}} - 1}{10^{\frac{A_r}{10}} - 1}} \right)}{\operatorname{arcosh} \left(\frac{f_H}{f_C} \right)} = 5.41$$

$n := \operatorname{ceil}(n) \quad n = 6$

Beispiel 2-8: -3dB Frequenz beim Tschebyscheff-Filter

Bei welcher Frequenz wird beim Filter aus dem vorherigen Beispiel der -3dB-Punkt erreicht?

Lösung:

$n = 6 \quad f_C := 400$ [Hz] $A_r := 1$ [dB]
 $\epsilon := \sqrt{10^{0.1 A_r} - 1} = 0.509$
 $f_{3dB} := f_C \cdot \cosh \left(\frac{\operatorname{arcosh} \left(\frac{1}{\epsilon} \right)}{n} \right) = 409.377$ [Hz]

Zeit- und Laufzeitverhalten

Aufgrund der Welligkeit im Durchlassbereich zeigen Tschebyscheff-Filter ein ausgeprägtes Überschwingen in der Sprungantwort und eine ausgeprägt nicht konstante Gruppenlaufzeit. Das Verhalten verschlechtert sich mit zunehmender Welligkeit.

Wird ein besseres Impulsverhalten bei grosser Flankensteilheit und kleiner Filterordnung verlangt, ist eventuell ein inverses Tschebyscheff oder ev. elliptisches Filter die günstigere Wahl.

Für die Berechnung der Sprungantwort und Gruppenlaufzeit existieren keine allgemein gültigen und einfachen Formeln. Während T_g noch direkt mit Gl. (2-22) bestimmt werden kann, muss für die Sprungantwort ein Partialbruchzerlegung oder die Differenzialgleichung numerisch gelöst werden.

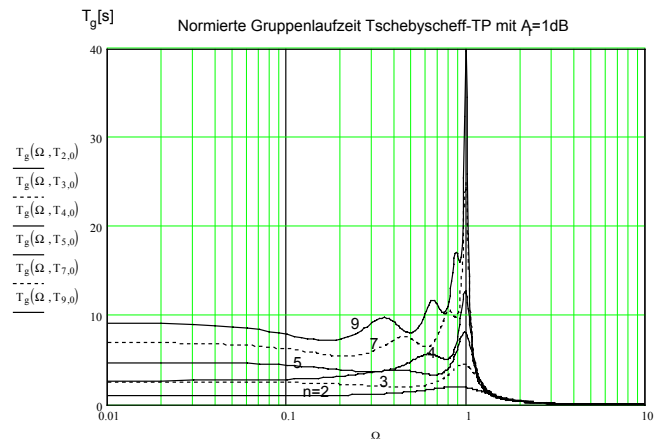
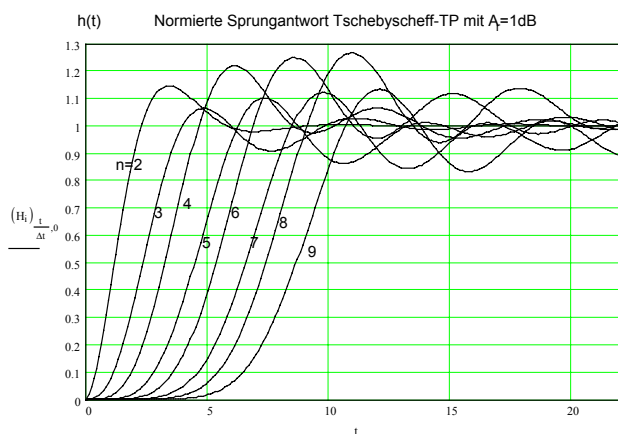
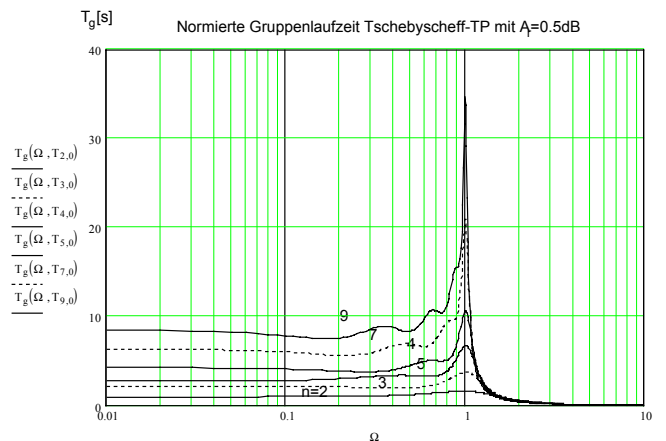
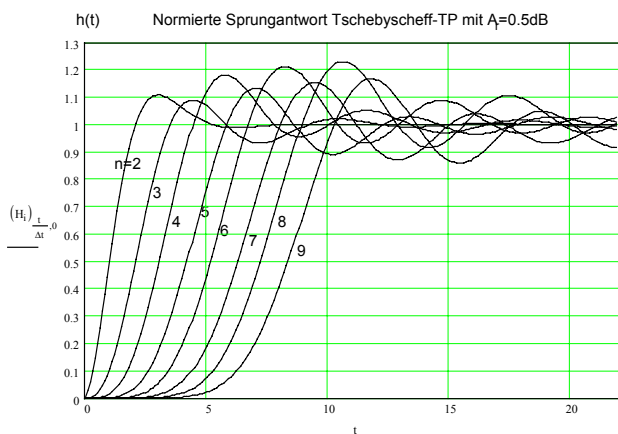
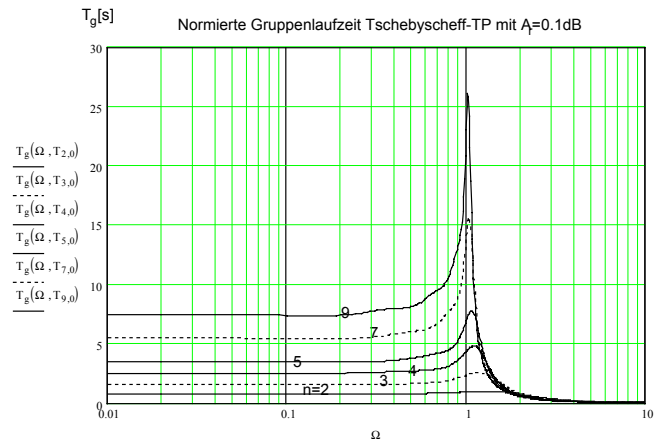
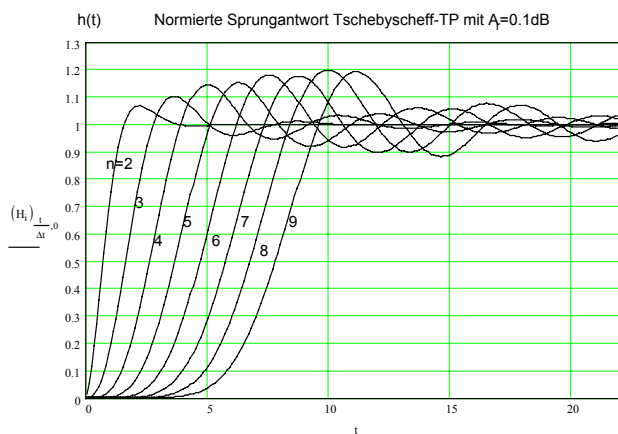


Bild 2-21: Sprungantwort und Gruppenlaufzeit normierter Tschebyscheff-Tiefpässe mit Welligkeiten von 0.1, 0.5 und 1dB.

Beispiel 2-9: Dimensionierung Tschebyscheff Tiefpassfilter

Man realisiere mit linearen und quadratischen Gliedern nach Sallen-Key ein ordnungsminimales Tiefpassfilter ohne Welligkeit im Sperrbereich, das die folgende Sperranforderung erfüllt:

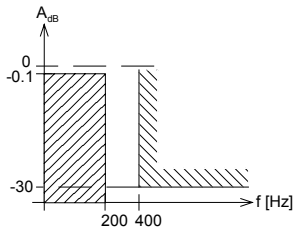


Bild 2-22:
 Dämpfungsschablone für Sperranforderung in Beispiel 2-9.

Lösung:

Die ordnungsminimale Lösung ist ein Tschebyscheff-Tiefpass mit einer Welligkeit von 0.1dB. Die Notwendige Ordnung wird mit Gl. (2-29) bestimmt. Damit werden die normierten Polfrequenzen und Polgüten aus der Tabelle gelesen oder mit Gl. (2-28), (2-12),(2-13) berechnet. Dies bildet die Grundlage zum Einsetzen in die Dimensionierungsgleichungen für die Teilfilter.

Vorgaben: $f_C := 200 \cdot 10^0$ [Hz] $A_r := 0.1$ [dB]
 $f_H := 500 \cdot 10^0$ [Hz] $A_H := 30$ [dB]

Berechnungen:

$\omega_C := f_C \cdot 2\pi$ $\omega_H := f_H \cdot 2\pi$ $\epsilon := \sqrt{10^{0.1A_r} - 1}$

Bestimmung der minimal notwendigen Filterordnung n:

$$n := \frac{\operatorname{arcosh} \left[\frac{\frac{A_H}{10^{10} - 1}}{\frac{A_r}{10^{10} - 1}} \right]}{\operatorname{arcosh} \left(\frac{f_H}{f_C} \right)} \quad n = 3.846$$

$n := \operatorname{ceil}(n) \quad n = 4$

$m := 0, 1, \dots, \operatorname{trunc} \left(\frac{n}{2} \right) - 1$ Indizes der Teilfilter (konjugiert komplexe Pole)

Bestimmung der normierten Pole: $j := \sqrt{-1}$ $\epsilon = 0.153$

$$S_{PT_m} := -\sin \left(\frac{1 + 2 \cdot m}{2 \cdot n} \pi \right) \cdot \sinh \left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right) + j \cdot \cos \left(\frac{1 + 2 \cdot m}{2 \cdot n} \pi \right) \cdot \cosh \left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right)$$

Polgüten und Polfrequenzen für quadratische Teilfilter:

$\Omega_{PT(m)} := |S_{PT_m}|$

$Q_{PT(m)} := \frac{-\Omega_{PT(m)}}{2 \operatorname{Re}(S_{PT_m})}$

m =	$Q_{PT(m)} =$	$\Omega_{PT(m)} =$
0	2.183	1.153
1	0.619	0.789

Die Dimensionierung der beiden quadratischen Teilfilter muss die Anfangsdämpfung der geradzahigen Filterordnung berücksichtigen. Dies erfolgt durch Einstellen der DC-Verstärkung mit einem Spannungsteiler, der den Widerstand R_{IB} der zweiten Stufe aufteilt.

Grunddämpfung des Filters

$$A_0 := \text{wenn}(\text{mod}(n, 2) = 1, 1, 10^{-0.05 \cdot A_v}) \quad A_0 = 0.989$$

Dimensionierung SK-Tiefpass 4. Ordnung (C gegeben, R gesucht).
Realisation mit zwei kaskadierten Teilfiltern 2. Ordnung :

Vorgaben 1. Teilfilter :

$$\begin{aligned} Q_p &:= Q_{PT}(1) & \omega_T &:= 1 \cdot 10^6 \text{ [rad/s]} & f_C &= 200 \text{ [Hz]} \\ \Omega_p &:= \Omega_{PT}(1) & C_4 &:= 100 \cdot 10^{-9} \text{ [F]} & C_2 &:= 220 \cdot 10^{-9} \text{ [F]} \end{aligned}$$

Bedingung: $C_{2\min} := 4Q_p^2 \cdot C_4 \quad C_{2\min} = 1.532 \times 10^{-7} \text{ [F]}$

$$\omega_C := 2 \cdot \pi \cdot f_C \quad \omega_p := \Omega_p \cdot \omega_C \quad \omega_p = 991.808$$

$$R_1 := \frac{C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4Q_p^2 \cdot C_2 \cdot C_4}}{2 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot \Omega_p \cdot Q_p \cdot \omega_C} \quad R_3 := \frac{1}{R_1 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot \Omega_p^2 \cdot \omega_C^2}$$

Resultate: $R_{1A} := R_1 \quad R_{1A} = 1.264 \times 10^4 \text{ [\Omega]}$
 $R_{3A} := R_3 \quad R_{3A} = 3.657 \times 10^3 \text{ [\Omega]}$
 $C_{2A} := C_2 \quad C_{2A} = 2.2 \times 10^{-7} \text{ [F]}$
 $C_{4A} := C_4 \quad C_{4A} = 1 \times 10^{-7} \text{ [F]}$

Vorgaben 2. Teilfilter:

$$\begin{aligned} Q_p &:= Q_{PT}(0) & \omega_T &:= 1 \cdot 10^6 \text{ [rad/s]} & f_C &= 200 \text{ [Hz]} \\ \Omega_p &:= \Omega_{PT}(0) & C_4 &:= 10 \cdot 10^{-9} \text{ [F]} & C_2 &:= 220 \cdot 10^{-9} \text{ [F]} \end{aligned}$$

Bedingung: $C_{2\min} := 4Q_p^2 \cdot C_4 \quad C_{2\min} = 1.906 \times 10^{-7} \text{ [F]}$

$$\omega_C := 2 \cdot \pi \cdot f_C \quad \omega_p := \Omega_p \cdot \omega_C$$

$$R_1 := \frac{C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4Q_p^2 \cdot C_2 \cdot C_4}}{2 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot \Omega_p \cdot Q_p \cdot \omega_C} \quad R_3 := \frac{1}{R_1 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot \Omega_p^2 \cdot \omega_C^2}$$

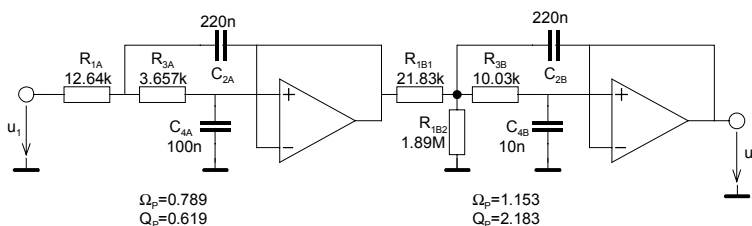
Resultate: $R_{1B} := R_1 \quad R_{1B} = 2.158 \times 10^4 \text{ [\Omega]}$
 $R_{3B} := R_3 \quad R_{3B} = 1.003 \times 10^4 \text{ [\Omega]}$
 $C_{2B} := C_2 \quad C_{2B} = 2.2 \times 10^{-7} \text{ [F]}$
 $C_{4B} := C_4 \quad C_{4B} = 1 \times 10^{-8} \text{ [F]}$

Einstellen der DC-Verstärkung über einen Spannungsteiler indem R_{1B} aufgeteilt wird:

$$R_{1B2} := \frac{R_{1B}}{1 - A_0} \quad R_{1B2} = 1.885 \times 10^6 \text{ [\Omega]}$$

$$R_{1B1} := \frac{R_{1B2}}{A_0} - R_{1B2} \quad R_{1B1} = 2.183 \times 10^4 \text{ [\Omega]}$$

Dies ergibt das Detailschema der gesamten Filterschaltung:



Der Amplitudengang der gesamten Schaltung und der einzelnen Teilfilter werden mit exakten Werten:

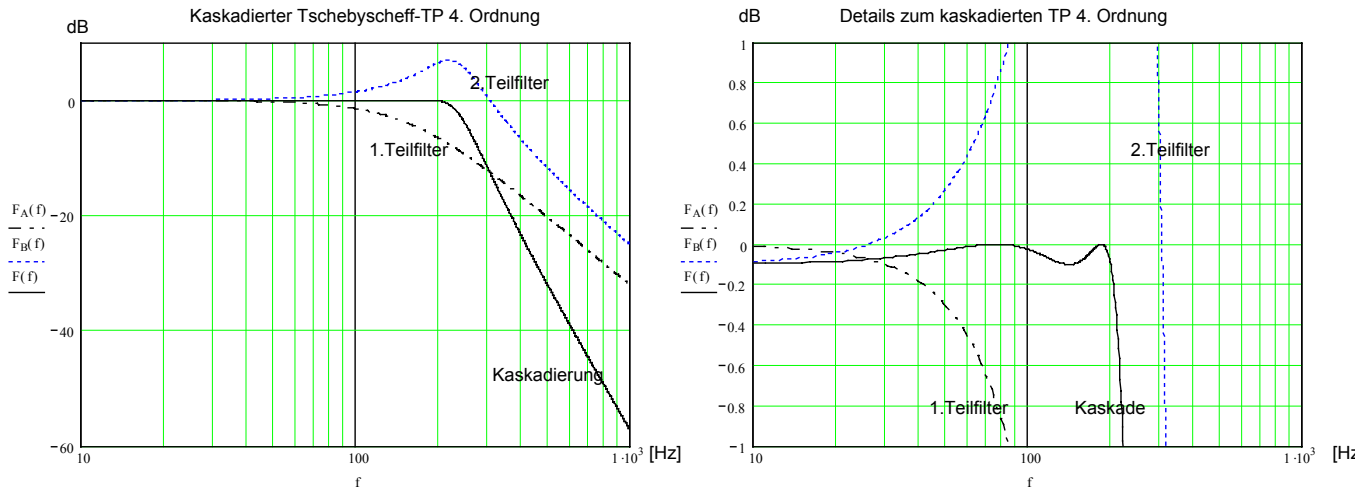


Bild 2-23: Berechneter Amplitudengang des Filters nach Beispiel 2-9.

2.7 Tiefpass-Hochpass Transformation

Die Realisation eines Hochpassfilter erfolgt über TP-HP Transformation des normierten Tiefpassfilters.

Bei der TP-HP Transformation werden alle Frequenzen reziprok betrachtet, d.h. es erfolgt eine Spiegelung bei $\Omega_c=1$. Die Dämpfungen bleiben unberührt:

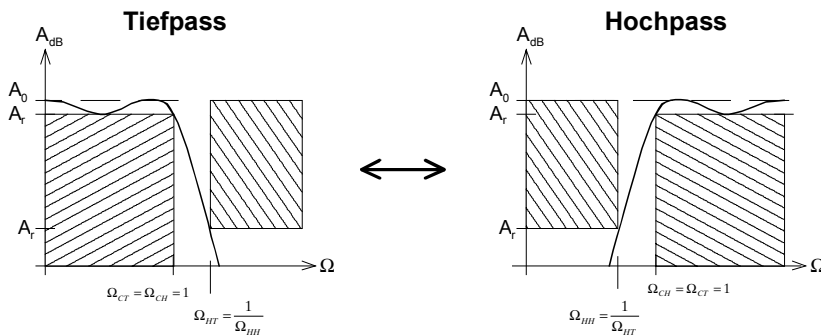


Bild 2-24: Tiefpass-Hochpass Transformation durch Spiegelung bei $\Omega_c=1$.

Formal gilt für die Tiefpass-Hochpass Transformation:

$$S_{PH} = \frac{1}{S_{PT}}$$

$$\Omega_{HP} = \frac{1}{\Omega_{TP}} \quad Q_{PH} = Q_{PT}$$

Tiefpass-Hochpass Transformation (2-31)

Durch die Transformation werden dem PN-Diagramm im Ursprung n Nullstellen zugefügt, wobei n die Ordnung des Filters ist. Die grafische Interpretation der Transformation am Beispiel eines Hochpass 3. Ordnung:

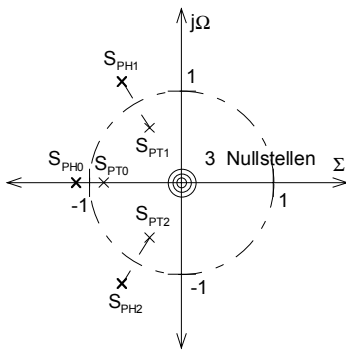


Bild 2-25: PN-Diagramm einer Tiefpass-Hochpass Transformation eines Filters 3. Ordnung. Die Pole des Normtiefpass werden durch Reziprokbildung ausserhalb des Kreises verschoben und es entstehen drei Nullstellen im Ursprung

Die Nullstellen in der Übertragungsfunktion des Hochpassfilters werden normalerweise nicht ausdrücklich erwähnt, da sie im Unendlichen liegen.

Beispiel 2-10: Tiefpass-Hochpass Transformation

Wie lautet die Übertragungsfunktion eines normierten Tschebyscheff-Hochpass 3. Ordnung mit Welligkeit 1dB?

Lösung:

Man berechnet mit Gl. (2-28) oder liest aus der Tabelle die Pole:

Vorgaben: $n := 3$ $A_r := 1$ [dB]

$m := 0, 1.. n - 1$ Indizes der konjugiert komplexen Pole

Bestimmung der Normtiefpass-Pole:

$$\epsilon := \sqrt{10^{0.1A_r} - 1} \quad \epsilon = 0.509$$

$$S_{PT_m} := -\sin\left(\frac{1 + 2 \cdot m}{2 \cdot n} \pi\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) + j \cdot \cos\left(\frac{1 + 2 \cdot m}{2 \cdot n} \pi\right) \cdot \cosh\left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$$

$$S_{PT} = \begin{pmatrix} -0.247 + 0.966i \\ -0.494 \\ -0.247 - 0.966i \end{pmatrix} \quad \text{Pole des Normtiefpass}$$

Tiefpass-Hochpass Transformation:

$$S_{PH_m} := \frac{1}{S_{PT_m}}$$

$$S_{PH} = \begin{pmatrix} -0.249 - 0.972i \\ -2.024 \\ -0.249 + 0.972i \end{pmatrix} \quad \text{Pole des Normhochpass}$$

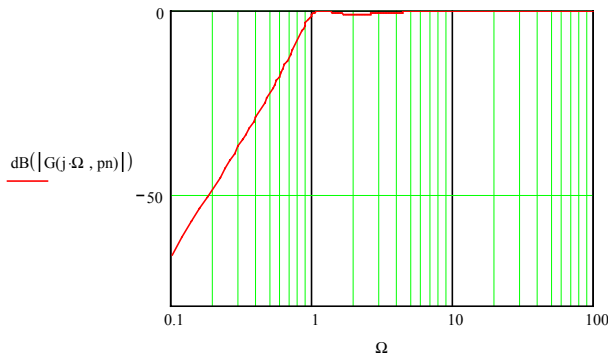
Die ergibt formal die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{s^3}{\left(1 + \frac{s}{-S_{PH_0}}\right) \left(1 + \frac{s}{-S_{PH_1}}\right) \left(1 + \frac{s}{-S_{PH_2}}\right)} = \frac{s^3}{\left(1 + \frac{s}{0.249 + 0.972j}\right) \left(1 + \frac{s}{1 - 2.024}\right) \left(1 + \frac{s}{1 - 0.249 - 0.972j}\right)}$$

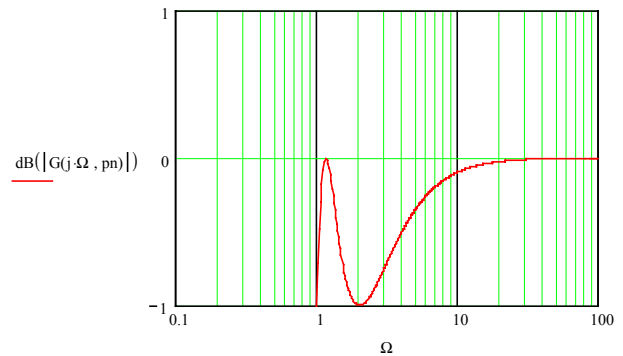
$$= \frac{s^3}{2.035 + 2.012s + 2.521s^2 + s^3}$$

Die grafische Darstellung zeigt den erwarteten Amplitudengang:

Amplitudengang Tschebyscheff Norm-Hochpass
 3. Ordnung, $A_r=1\text{dB}$



Details Amplitudengang Tschebyscheff Norm-Hochpass



Beispiel 2-11: Aktives Hochpassfilter (Tschebyscheff)

Man realisiere als aktives Filter mit quadratischen Teilfiltern nach Sallen-Key folgende Sperranforderung:

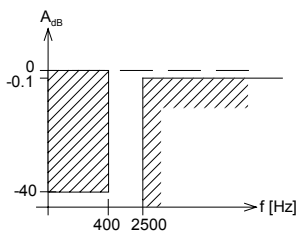


Bild 2-27: Dämpfungsschablone für Dimensionierung in Beispiel 2-11.

Lösung:

Man wählt ein Tschebyscheff-Filter mit 0.1dB Welligkeit. Zuerst werden die normierten Frequenzen bestimmt und über die Hochpass-Tiefpass Transformation die Werte des zugehörigen normierten Referenz Tiefpass bestimmt: Minimale Ordnung, Polfrequenzen und Polgüten. Diese Werte werden zur Bestimmung der Elementwerte für die Teilfilterschaltung benutzt.

Mit MathCad werden die normierten Hochpass-Polfrequenzen und Polgüten:

Vorgaben: $f_C := 2.5 \cdot 10^3$ [Hz] $A_r := 0.1$ [dB]
 $f_H := 400 \cdot 10^0$ [Hz] $A_H := 40$ [dB]

Berechnungen:

$\omega_C := f_C \cdot 2\pi$ $\epsilon := \sqrt{10^{0.1A_r} - 1}$
 $\Omega_{HTP} := \frac{f_C}{f_H}$ HP-TP Transformation der normierten Sperrfrequenz $\Omega_{HTP} = 6.25$

Bestimmung der Filterordnung:

$$n := \frac{\text{arcosh} \left(\sqrt{\frac{A_H}{10^{10} - 1}} \right)}{\text{arcosh}(\Omega_{HTP})}$$

$n = 2.849$
 $n := \text{ceil}(n)$ $n = 3$

$$m := 0, 1, \dots, \text{trunc}\left(\frac{n-1}{2}\right) \quad \text{Index über die Anzahl quadratischer Teilfilter}$$

Berechnung Tschebyscheff-Pole der Ordnung n:

$$S_{PT_m} := -\sin\left(\frac{1+2 \cdot m}{2 \cdot n} \pi\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{n} \cdot \text{arsinh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) + j \cdot \cos\left(\frac{1+2 \cdot m}{2 \cdot n} \pi\right) \cdot \cosh\left(\frac{1}{n} \cdot \text{arsinh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$$

Polgüten und Polfrequenzen des Referenziefpass:

$$\Omega_{PT(m)} := |S_{PT_m}|$$

$$Q_{PT(m)} := \frac{-\Omega_{PT(m)}}{2 \text{Re}(S_{PT_m})}$$

m =	$Q_{PT(m)} =$	$\Omega_{PT(m)} =$
0	1.34093	1.2999
1	0.5	0.96941

Tiefpass-Hochpass Transformation

Polgüten und normierte Polfrequenzen für quadratische Teilfilter des Hochpass:

$$\Omega_{PH(m)} := \frac{1}{\Omega_{PT(m)}}$$

$$Q_{PH(m)} := Q_{PT(m)}$$

m =	$Q_{PH(m)} =$	$\Omega_{PH(m)} =$
0	1.34093	0.76929
1	0.5	1.03156

Enddämpfung

$$A_{INF} := \text{wenn}(\text{mod}(n,2) = 1, 1, 10^{-0.05A_v})$$

$$A_{INF} = 1$$

Wir realisieren das Filter mit einem linearen und einem quadratischen Glied. Wegen der besseren Aussteuerbarkeit werden die Teilfilter in aufsteigender Güte angeordnet. Die Elementwerte werden mit den Dimensionierungsformeln nach Anhang.

Vorgaben 2. Teilfilter (quadratisch) :

$$Q_p := Q_{PH(0)} \quad \Omega_p := \Omega_{PH(0)} \quad f_c = 2.5 \times 10^3 \quad [\text{Hz}]$$

$$C := 10 \cdot 10^{-9} \quad [\text{F}] \quad (\text{Wahl}) \quad R_6 := 10 \cdot 10^3 \quad [\Omega]$$

Elementwerte:

$$\omega_c := 2 \cdot \pi \cdot f_c$$

$$C_1 := C \quad C_3 := C$$

$$R_2 := \frac{1}{2 \cdot \Omega_p \cdot Q_p \cdot C \cdot \omega_c} \quad R_2 = 3.086 \times 10^3 \quad [\Omega]$$

$$R_4 := \frac{2Q_p}{\Omega_p \cdot C \cdot \omega_c} \quad R_4 = 2.219 \times 10^4 \quad [\Omega]$$

Vorgaben 2. Teilfilter (linear) :

$$\Omega_{PH} := \Omega_{PH(1)} \quad f_c = 2.5 \times 10^3 \quad [\text{Hz}]$$

$$C := 10 \cdot 10^{-9} \quad [\text{F}] \quad (\text{Wahl})$$

Elementwerte:

$$\omega_c := 2 \cdot \pi \cdot f_c$$

$$R := \frac{1}{\Omega_{PH} \cdot C \cdot \omega_c} \quad R = 6.171 \times 10^3 \quad [\Omega]$$

Das Gesamtschema und der rechnerische Amplitudengang werden:

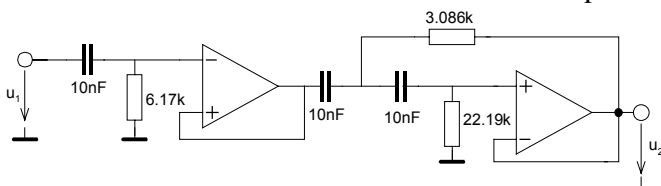
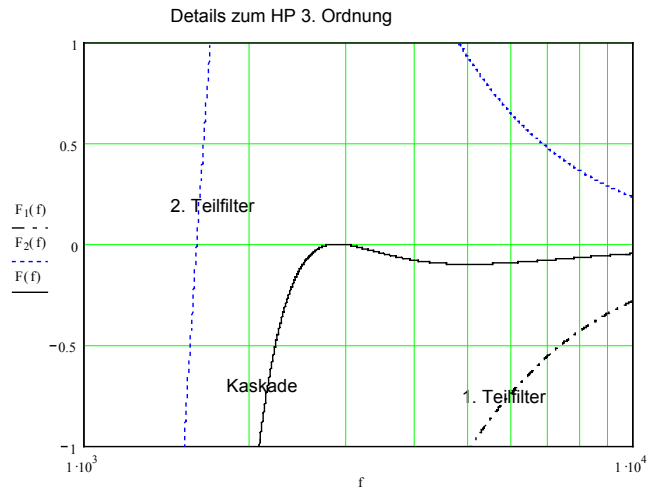
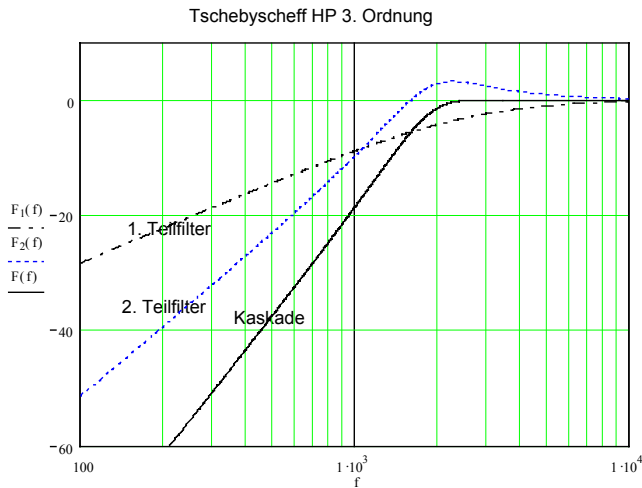


Bild 2-28: Detailschema der Dimensionierung des Tschebyscheff-Hochpass 3. Ordnung nach Beispiel 2-11.



Kontrolle der Sperranforderungen:

$$F(f_c) = -0.1 \quad [\text{dB}] \quad \text{Bei Grenzfrequenz}$$

$$F(f_H) = -43.298 \quad [\text{dB}] \quad \text{Bei Sperrfrequenz}$$

Bild 2-29: Berechneter Amplitudengang gesamthaft und der Teilfilter nach Beispiel 2-11 und Kontrolle der Dämpfung bei Grenz- und Sperrfrequenz f_{c/f_H} .

2.8 Tiefpass-Bandpass Transformation

Diese Transformation überführt ein Tiefpass der Ordnung n in ein Bandpass der Ordnung $2n$ mit einer definierbaren Bandbreite B . Sie ist vor allem zur Realisation von Bandpässen kleinerer Bandbreiten ($\Delta\Omega < 1$) geeignet. Es erfolgt eine Spiegelung bei $\Omega_0 = 0$ und eine Verschiebung zur Bandmittenfrequenz $\Omega_M = 1$:

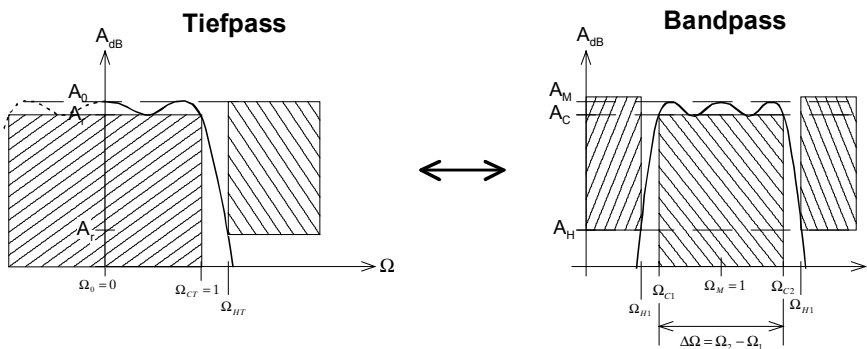


Bild 2-30: Tiefpass-Bandpass Transformation durch Spiegelung bei $\Omega_0 = 0$ und Verschiebung zur Bandmittenfrequenz $\Omega_M = 1$.

Die Steilheit der Bandpassflanken entsprechen der Steilheit des Referenziefpass. Die Bandbreite $\Delta\Omega$ ist frei wählbar.

$$S_{PT} = \frac{1}{\Delta\Omega} \left(S_{PB} + \frac{1}{S_{PB}} \right) = \frac{\omega_M}{\omega_{C2} - \omega_{C1}} \left(\frac{S_{PB}}{\omega_M} + \frac{\omega_M}{S_{PB}} \right) = D \left(\frac{1}{\Omega_{PB}} - \Omega_{PB} \right)$$

$$\omega_m = \sqrt{\omega_{C1} \cdot \omega_{C2}} \quad (2-32)$$

$$S_{PB} = \frac{S_{PT} \pm \sqrt{S_{PT}^2 - 4D^2}}{2D}$$

$$\Delta\Omega = \frac{\omega_{C2} - \omega_{C1}}{\omega_m} = \frac{f_{C2} - f_{C1}}{f_m} = \Omega_2 - \Omega_1 \quad \Omega_1 = \frac{1}{\Omega_2}$$

$$D = \frac{1}{\Delta\Omega}$$

$$A_K = \Delta\Omega \cdot \Omega_{TP} \cdot Q_{PB}^n \sqrt{A_M}$$

Tiefpass-Bandpass Transformation

Die Güte ist beim Bandpass per Definition immer auf -3.01dB bezogen. Der Faktor D ist als Kehrwert der normierten Bandbreite nur gleich der Bandpass-Güte Q , wenn der Referenztiefpass ebenfalls bei der Grenzfrequenz -3.01dB hat (z.B. Bessel, Butterworth)

Der Stufenkorrekturfaktor A_K bewirkt, dass bei $\Omega=1$ gesamthaft eine Dämpfung von A_M erreicht wird. A_K ist daher in jedem Teilfilter zu berücksichtigen.

Die Transformation fügt dem PN-Diagramm im Ursprung n Nullstellen zu, wobei n die Ordnung des Filters ist. Ein reeller TP-Pol erzeugt ein konjugiert komplexes Polpaar mit der Polfrequenz $\Omega_{PB}=1$. Ein konjugiert komplexer TP-Pol erzeugt zwei konjugiert komplexe Polpaare mit gleichen Polgüten.

Die Polfrequenzen sind zueinander reziprok $\Omega_{PB1} = \frac{1}{\Omega_{PB2}}$ und haben so eine geometrische Symmetrie zu $\Omega_M=1$.

Die grafische Interpretation der Transformation am Beispiel eines Bandsperre 3. Ordnung:

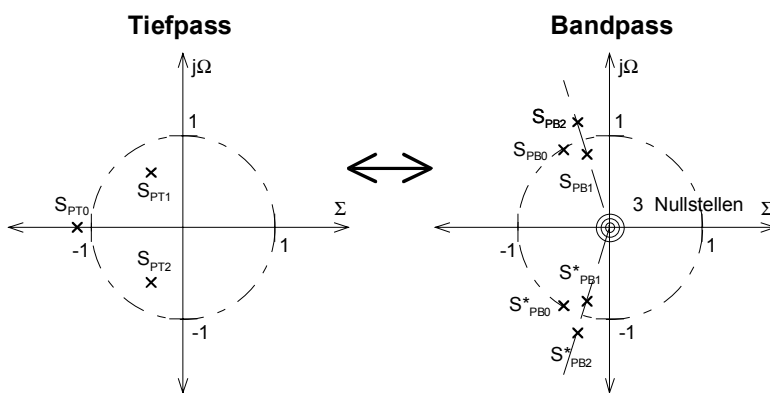


Bild 2-31: PN-Diagramm einer Tiefpass-Bandpass Transformation eines Filters 3. Ordnung. Ein TP-Pol erzeugt jeweils ein konjugiert komplexes Polpaar und es entstehen drei Nullstellen im Ursprung

Begründung TP-BP Transformation

Die Herleitung, bzw. der Beweis der Transformationsvorschrift ist etwas umfangreich und bräuchte hier wenig für die weiteren Anwendungen. Dem interessierten Leser sei hierzu auf [CHE95], S.2198 und [DAN74], S. 88 verwiesen.

Die Bestimmung der BP-Pole aus dem Referenztiefpass erfolgt durch Lösen der quadratischen Gleichung:

$$S_{PT} = \frac{1}{\Delta\Omega} \left(S_{PB} + \frac{1}{S_{PB}} \right) = D \left(S_{PB} + \frac{1}{S_{PB}} \right) \quad \rightarrow DS_{PB}^2 - S_{PT}S_{PB} + D = 0 \tag{2-34}$$

$$S_{PB} = \frac{S_{PT}}{2D} \pm \frac{\sqrt{S_{PT}^2 - 4D^2}}{2D}$$

Für gegebene Kreisfrequenzen wird die Transformation durch Ersetzen von S mit $j\Omega$:

$$j\Omega_{PT} = D \left(j\Omega_{PB} + \frac{1}{j\Omega_{PB}} \right) \quad \rightarrow \Omega_{PT} = D \left(\frac{1}{\Omega_{PB}} - \Omega_{PB} \right) = D \left(\frac{\omega_M}{\omega_{PB}} - \frac{\omega_{PB}}{\omega_M} \right) \tag{2-33}$$

$$\Omega_{PB} = \frac{\Omega_{PT}}{2D} \pm \frac{\sqrt{\Omega_{PT}^2 + 4D^2}}{2D}$$

Beispiel 2-12: Minimale Filterordnung für Bandpass

Welche minimale Filterordnung muss ein Butterworth-Bandpass haben um der folgenden Sperranforderung zu genügen?

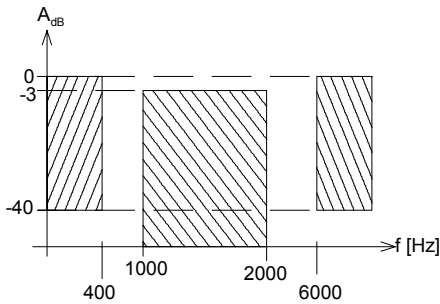


Bild 2-32: Dämpfungsschablone für Bestimmung der Filterordnung in Beispiel 2-12.

Lösung:

Man bestimmt zuerst das kleinere Ω_{CTP} des zugehörigen Referenztieffpass. Daraus berechnet man die Tiefpass-Ordnung n_{TP} . Die Bandpass-Ordnung ist dann $2n_{TP}$.

Vorgaben: $f_{C1} := 1000$ [Hz] $f_{C2} := 2000$ [Hz]
 $f_{H1} := 400$ [Hz] $f_{H2} := 6000$ [Hz] $A_H := 40$ dB]

Berechnungen:

$$f_M := \sqrt{f_{C1} \cdot f_{C2}} \quad f_M = 1.414 \times 10^3 \text{ [Hz]}$$

$$\Omega_{C1} := \frac{f_{C1}}{f_M} \quad \Omega_{C1} = 0.707$$

$$\Omega_{C2} := \frac{f_{C2}}{f_M} \quad \Omega_{C2} = 1.414$$

$$\Omega_{H2} := \frac{f_{H2}}{f_M} \quad \Omega_{H2} = 4.243$$

$$\Omega_{H1} := \frac{f_{H1}}{f_M} \quad \Omega_{H1} = 0.283$$

BP-TP Transformation:

$$D := \frac{1}{\Omega_{C2} - \Omega_{C1}} \quad D = 1.414$$

$$\Omega_{CTP} := D \cdot \left(\frac{1}{\Omega_{C1}} - \Omega_{C1} \right) \quad \Omega_{CTP} = 1 \quad (\text{Die Grenzfrequenzen werden auf } \Omega=1 \text{ transformiert})$$

$$\Omega_{HTP1} := D \cdot \left(\frac{1}{\Omega_{H1}} - \Omega_{H1} \right) \quad \Omega_{HTP1} = 4.6$$

$$\Omega_{HTP2} := \left| D \cdot \left(\frac{1}{\Omega_{H2}} - \Omega_{H2} \right) \right| \quad \Omega_{HTP2} = 5.667$$

$$\Omega_{HTP} := \text{wenn}(\Omega_{HTP1} < \Omega_{HTP2}, \Omega_{HTP1}, \Omega_{HTP2}) \quad \Omega_{HTP} = 4.6 \quad \text{Die härtere Sperrforderung gilt!}$$

Ordnung des Referenztieffpass:

$$n_{TP} := \frac{\ln(10^{0.1 A_H} - 1)}{2 \ln(\Omega_{HTP})} \quad n_{TP} = 3.018$$

$$n_{TP} := \text{ceil}(n_{TP}) \quad n_{TP} = 4 \quad (\text{Ordnung Referenz-TP})$$

Ordnung des Bandpass:

$$n_{BP} := 2 \cdot n_{TP} \quad n_{BP} = 8 \quad (\text{Ordnung Bandpass})$$

Beispiel 2-13: Berechnung normierte Bandpass Pole

Man bestimme die normierten Bandpass-Pole für ein Butterworth-Bandpass 8. Ordnung mit $\Delta\Omega=0.6$. Die Bandpass-Pole und die Pole des Referenztieffpass sind im PN-Diagramm grafisch darzustellen.

Vorgaben:

$\Delta\Omega := 0.6$ normierte Bandbreite
 $n = 4$ Ordnung des Referenz Tiefpass

$$S_{TP} = \begin{pmatrix} -0.383 + 0.924j \\ -0.924 + 0.383j \\ -0.924 - 0.383j \\ -0.383 - 0.924j \end{pmatrix}$$

Normierte Polstellen
Butterworth Tiefpass

Transformationsvorschriften:

$$\Omega_1 := \frac{\sqrt{\Delta\Omega^2 + 4}}{2} - \frac{\Delta\Omega}{2} \quad \Omega_1 = 0.744$$

$$\Omega_2 := \frac{\sqrt{\Delta\Omega^2 + 4}}{2} + \frac{\Delta\Omega}{2} \quad \Omega_2 = 1.344$$

$$D := \frac{1}{\Omega_2 - \Omega_1} \quad D = 1.667$$

$$S_{PBP1}(S_{TP,m}) := \frac{S_{TP,m}}{2D} + \frac{\sqrt{(S_{TP,m})^2 - 4D^2}}{2D}$$

$$S_{PBP2}(S_{TP,m}) := \frac{S_{TP,m}}{2D} - \frac{\sqrt{(S_{TP,m})^2 - 4D^2}}{2D}$$

Konjugiert komplexe
normierte Bandpass Pole

$$m := 0..2n - 1$$

$$S_{PBP_{2k}} := S_{PBP1}(S_{TP,k})$$

$$S_{PBP_{2k+1}} := S_{PBP2}(S_{TP,k})$$

$$S_{PBP} = \begin{pmatrix} -0.084 - 0.755j \\ -0.146 + 1.309j \\ -0.244 - 0.853j \\ -0.31 + 1.083j \\ -0.244 + 0.853j \\ -0.31 - 1.083j \\ -0.084 + 0.755j \\ -0.146 - 1.309j \end{pmatrix}$$

Normierte Polstellen
Butterworth Bandpass

Lage der Polstellen Butterworth Tiefpass 4. Ordnung-Bandpass 8. Ordnung

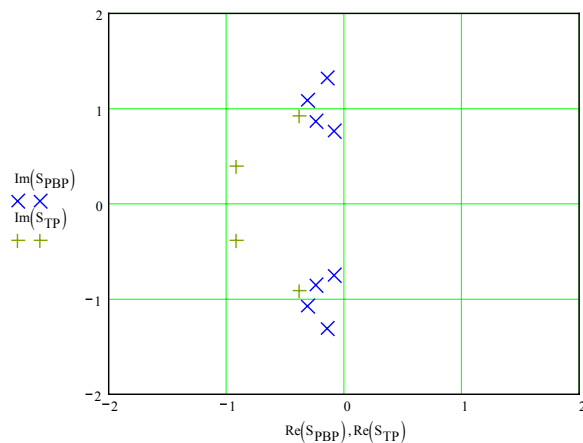


Bild 2-33: PN-Diagramm der TP-BP Transformation für einen Tiefpass 3. Ordnung nach Beispiel 2-13.

Legende:
+ Tiefpass-Pol
x Bandpass-Pol

Beispiel 2-14: Dimensionierung Tschebyscheff-Bandpass

Folgende Sperranforderung ist mit MGK-Teilfiltern zu realisieren. Man beachte die geforderte Mittenverstärkung von +6dB:

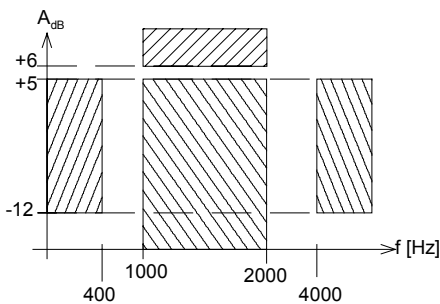


Bild 2-34: Dämpfungsschablone für Dimensionierung in Beispiel 2-14.

GEMARD KRUCKER, 27.9.2000

Vorgaben: $f_{C1} := 1000$ [Hz] $f_{C2} := 2000$ [Hz] $A_r := 1$ [dB] Welligkeit
 $f_{H1} := 400$ [Hz] $f_{H2} := 4000$ [Hz] $A_H := 12$ [dB] Min. Sperrdämpfung
 $A_m := 6$ [dB] Verstärkung bei Mittenfrequenz

Berechnungen:

$$f_M := \sqrt{f_{C1} \cdot f_{C2}} \quad f_M = 1.414 \times 10^3$$

$$\Omega_{C1} := \frac{f_{C1}}{f_M} \quad \Omega_{C2} := \frac{f_{C2}}{f_M} \quad \Omega_{H2} := \frac{f_{H2}}{f_M} \quad \Omega_{H1} := \frac{f_{H1}}{f_M}$$

$$\Omega_{C1} = 0.707 \quad \Omega_{C2} = 1.414 \quad \Omega_{H2} = 2.828 \quad \Omega_{H1} = 0.283$$

BP-TP-Transformation, Referenz-Tiefpass:

$$D := \frac{1}{\Omega_{C2} - \Omega_{C1}} \quad D = 1.414$$

$$\Omega_{CTP} := D \cdot \left(\frac{1}{\Omega_{C1}} - \Omega_{C1} \right) \quad \Omega_{HTP1} := D \cdot \left(\frac{1}{\Omega_{H1}} - \Omega_{H1} \right) \quad \Omega_{HTP2} := \left| D \cdot \left(\frac{1}{\Omega_{H2}} - \Omega_{H2} \right) \right|$$

$$\Omega_{CTP} = 1 \quad \Omega_{HTP1} = 4.6 \quad \Omega_{HTP2} = 3.5$$

$$\Omega_{HTP} := \text{wenn}(\Omega_{HTP1} < \Omega_{HTP2}, \Omega_{HTP1}, \Omega_{HTP2}) \quad \Omega_{HTP} = 3.5 \quad \text{Die härtere Sperrforderung gilt!}$$

$$\varepsilon := \sqrt{10^{0.1 A_r} - 1} \quad \varepsilon = 0.509$$

$$n_{TP} := \frac{\text{arcosh} \left[\sqrt{\frac{10^{0.1(A_H + A_m)} - 1}{\varepsilon^2}} \right]}{\text{arcosh}(\Omega_{HTP})} \quad n_{TP} = 1.783$$

$$n_{TP} := \text{ceil}(n_{TP}) \quad n_{TP} = 2$$

$$k := 0..n_{TP} - 1$$

Normierte Tschebyscheff-Tiefpass Pole der Ordnung n_{TP}

$$S_{PT_k} := -\sin\left(\frac{1+2 \cdot k}{2 \cdot n_{TP}} \cdot \pi\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{n_{TP}} \cdot \text{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) + j \cdot \cos\left(\frac{1+2 \cdot k}{2 \cdot n_{TP}} \cdot \pi\right) \cdot \cosh\left(\frac{1}{n_{TP}} \cdot \text{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

$$m := 0, 1.. \text{trunc}\left(\frac{n_{TP} - 1}{2}\right) \quad \text{Indizes der Teilfilter}$$

$$\Omega_{PT_m} := |S_{PT_m}| \quad S_{PT} = \begin{pmatrix} -0.549 + 0.895i \\ -0.549 - 0.895i \end{pmatrix} \quad \Omega_{PT} = (1.05)$$

Tiefpass-Bandpass Transformation

$$S_{PB1}(S_{PT}, m) := \frac{S_{PT_m}}{2D} + \frac{\sqrt{(S_{PT_m})^2 - 4D^2}}{2D} \quad \text{Konjugiert komplexe normierte Bandpass Pole}$$

$$S_{PB2}(S_{PT}, m) := \frac{S_{PT_m}}{2D} - \frac{\sqrt{(S_{PT_m})^2 - 4D^2}}{2D}$$

$$S_{PB_{2k}} := S_{PB1}(S_{PT}, k) \quad S_{PB_{2k+1}} := S_{PB2}(S_{PT}, k) \quad S_{PB} = \begin{pmatrix} -0.135 - 0.716i \\ -0.254 + 1.349i \\ -0.135 + 0.716i \\ -0.254 - 1.349i \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{PB_k} := |S_{PB_k}| \quad Q_{PB_k} := \frac{-\Omega_{PB_k}}{2 \cdot \text{Re}(S_{PB_k})} \quad Q_{PB} = \begin{pmatrix} 2.707 \\ 2.707 \end{pmatrix} \quad \Omega_{PB} = \begin{pmatrix} 0.729 \\ 1.373 \end{pmatrix} \quad \text{Normierte Pole und Güten Tschebyscheff Bandpass der Ordnung } 2n.$$

$$A_{K_k} := \sqrt{10^{0.05 \cdot A_m}} \cdot \frac{1}{D} \cdot \Omega_{PT} \cdot \text{trunc}\left(\frac{k}{2}\right) \cdot Q_{PB_k} \quad A_K = \begin{pmatrix} 2.839 \\ 2.839 \end{pmatrix} \quad \text{Stufenverstärkungskorrekturfaktor für jede Bandpassstufe}$$

Dimensionierung des Bandpassfilters mit zwei MGK-Teilfiltern:

1. Teilfilter (Index 0)

$$Q_P := Q_{PB_0} \quad \Omega_P := \Omega_{PB_0} \quad A_M := A_{K_0} \quad (\text{Stufenkorrektur Teilfilter 1})$$

$$C := 10 \cdot 10^{-9} \quad (\text{Wahl})$$

$$Q_P = 2.707 \quad \Omega_P = 0.729 \quad f_M = 1.414 \times 10^3 \quad A_M = 2.839$$

$$\omega_M := 2\pi f_M$$

$$R_{11} := \frac{Q_P}{\Omega_P \cdot \omega_M \cdot C \cdot |A_M|} \quad R_{11} = 1.473 \times 10^4 \quad [\Omega]$$

$$R_{31} := \frac{Q_P}{\Omega_P \cdot \omega_M \cdot C \cdot (2Q_P^2 - |A_M|)} \quad R_{31} = 3.539 \times 10^3 \quad [\Omega]$$

$$R_{51} := \frac{2Q_P}{\Omega_P \cdot \omega_M \cdot C} \quad R_{51} = 8.363 \times 10^4 \quad [\Omega]$$

2. Teilfilter (Index 1)

$$Q_P := Q_{PB_1} \quad \Omega_P := \Omega_{PB_1} \quad A_M := A_{K_1} \quad (\text{Stufenkorrektur Teilfilter 2})$$

$$C := 10 \cdot 10^{-9} \quad (\text{Wahl})$$

$$Q_P = 2.707 \quad \Omega_P = 1.373 \quad f_M = 1.414 \times 10^3 \quad A_M = 2.839$$

$$\omega_M := 2\pi f_M$$

$$R_{12} := \frac{Q_P}{\Omega_P \cdot \omega_M \cdot C \cdot |A_M|} \quad R_{12} = 7.818 \times 10^3 \quad [\Omega]$$

$$R_{32} := \frac{Q_P}{\Omega_P \cdot \omega_M \cdot C \cdot (2Q_P^2 - |A_M|)} \quad R_{32} = 1.878 \times 10^3 \quad [\Omega]$$

$$R_{52} := \frac{2Q_P}{\Omega_P \cdot \omega_M \cdot C} \quad R_{52} = 4.439 \times 10^4 \quad [\Omega]$$

Grafik $\text{dB}(x) := 20 \log(x)$

$$G(s, R_1, C_2, R_3, C_4, R_5) := \frac{-R_3 \cdot R_5 \cdot C_4 \cdot s}{R_1 + R_3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} \cdot (C_2 + C_4) \cdot s + \frac{R_1 \cdot R_3 \cdot R_5}{R_1 + R_3} \cdot C_2 \cdot C_4 s^2}$$

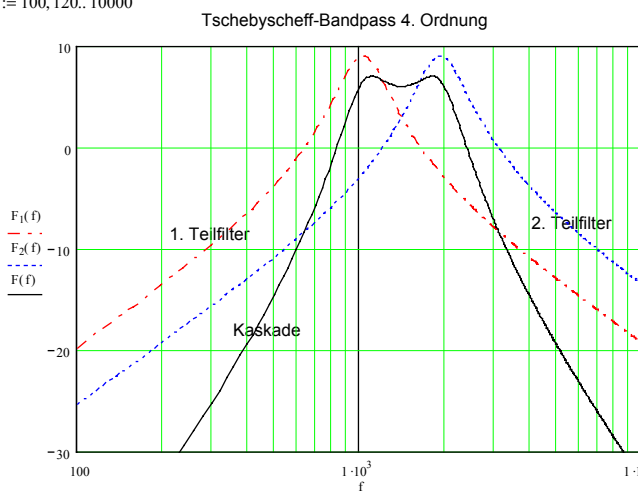
Übertragungsfunktion quadratisches MGK-Teilfilter

$$F_1(f) := \text{dB}(|G(2\pi j \cdot f, R_{11}, C, R_{31}, C, R_{51})|) \quad \text{Amplitudengang Teilfilter 1}$$

$$F_2(f) := \text{dB}(|G(2\pi j \cdot f, R_{12}, C, R_{32}, C, R_{52})|) \quad \text{Amplitudengang Teilfilter 2}$$

$$F(f) := F_1(f) + F_2(f) \quad \text{Amplitudengang Kaskadierung}$$

$$f := 100, 120, 10000$$



Kontrolle der Grenz- und Sperrfrequenzdämpfungen:

- $F(f_M) = 6 \quad [\text{dB}]$
- $F(f_{C1}) = 6 \quad [\text{dB}]$
- $F(f_{C2}) = 6 \quad [\text{dB}]$
- $F(f_{H1}) = -19.465 \quad [\text{dB}]$
- $F(f_{H2}) = -14.583 \quad [\text{dB}]$

Die gesamte Schaltung wird:

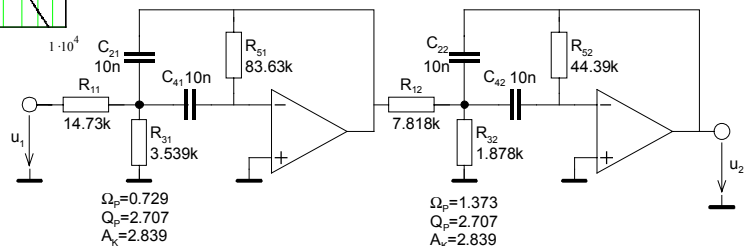


Bild 2-35: Amplitudengang und Detailschema der dimensionierten Tschebyscheff-Bandpass 4. Ordnung nach Beispiel 2-14.

2.9 Bandpass aus Tiefpass-Hochpass Zusammenschaltung

Bandpässe mit grosser Bandbreite ($\Delta\Omega > 1$) können auch aus einer Serieschaltung von Tief- und Hochpassfilter realisiert werden. Die obere Grenzfrequenz wird durch die obere Grenzfrequenz des Tiefpass, die untere Grenzfrequenz durch die untere Grenzfrequenz des Hochpass bestimmt. Der Vorteil dieser Methode liegt in der vereinfachten Berechnung und den weniger hohen Anforderungen an die Teilschaltungen.

Bei kleinen Bandbreiten steigt die Dämpfung im Durchlassbereich durch die gegenseitige Beeinflussung stark an wie folgende Beispiele zeigen. Bei grossen Bandbreiten und Filterordnungen wird der Fehler vernachlässigbar klein:

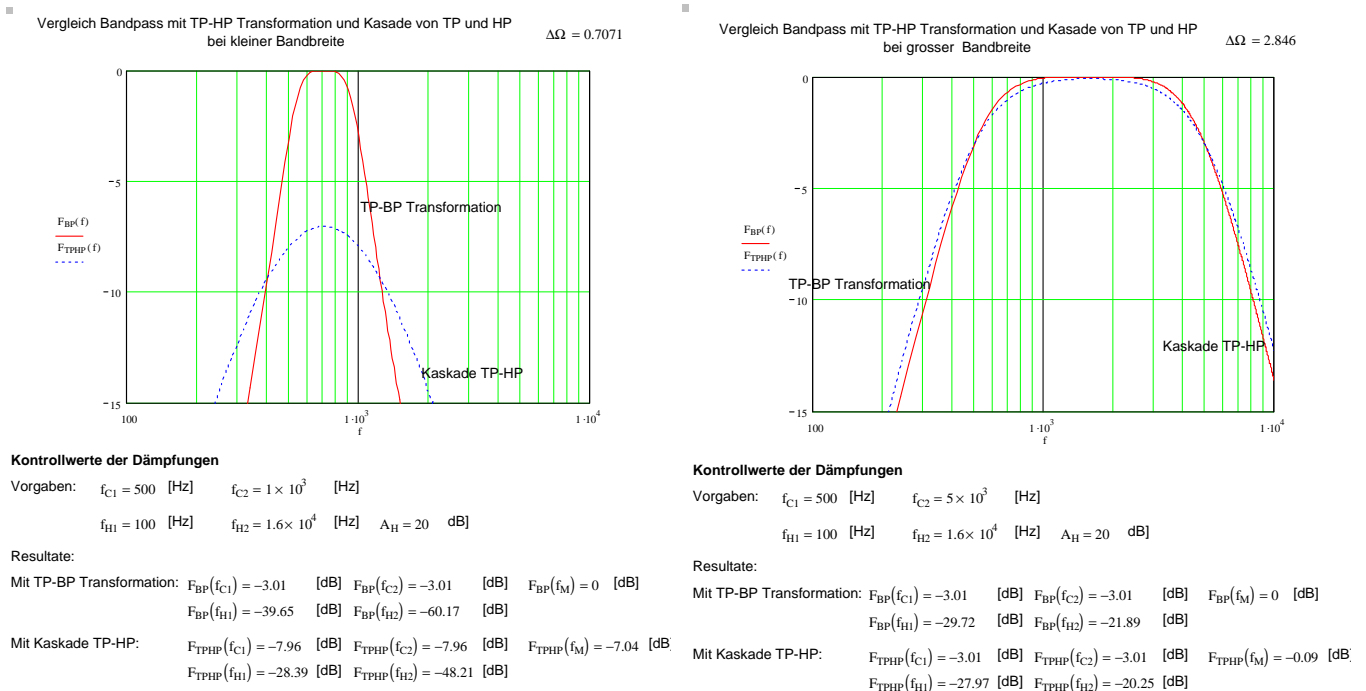


Bild 2-36: Vergleich Amplitudengang von Butterworth-Bandpässen 4.Ordnung verschiedener Bandbreite, realisiert mit TP-BP Transformation und Serieschaltung von Tief- und Hochpass.

Bemerkung:

Bandpässe aus kaskadierten Tief- und Hochpässen der Ordnung 4 und Vielfachen davon können ohne Dämpfungsfehler im Durchlassbereich realisiert werden. Hierbei können immer quadratische Glieder mit reiner Hoch- und Tiefpasscharakteristik gebildet werden.

2.10 Tiefpass-Bandsperre Transformation

Diese Transformation überführt einen Tiefpass der Ordnung n in eine Bandsperre der Ordnung $2n$ mit einer definierbaren Bandbreite B . Filter dieser Art dienen vor allem zur selektiven Unterdrückung einzelner Frequenzen. Daher ist diese Transformation vor allem zur Realisation von Bandsperren mit kleinen Bandbreiten ($\Delta\Omega < 1$) geeignet.

Sie hat aber nicht die praktische Bedeutung wie die Bandpass Transformation, da die aktiven Schaltungen wegen der endlichen Nullstellen in der Übertragungsfunktion wesentlich aufwendiger sind. Die erreichbare maximale Dämpfung ist von der Filtercharakteristik und in der Praxis von den Bauelementeigenschaften abhängig.

In der Praxis trifft man vielfach nur Bandsperren zweiter Ordnung an. Sie sind besonders einfach zu realisieren, da nur ein reeller Pol transformiert wird. Bandsperren höherer Ordnung verlangen Teilschaltungen bei denen die Pole und Nullstellen separat definiert werden können und daher aufwändiger sind.

Die Transformation erfolgt über eine Hochpass-Transformation, gefolgt von einer Spiegelung bei $\Omega_0=0$ und eine Verschiebung zur Bandmittenfrequenz $\Omega_M=1$:

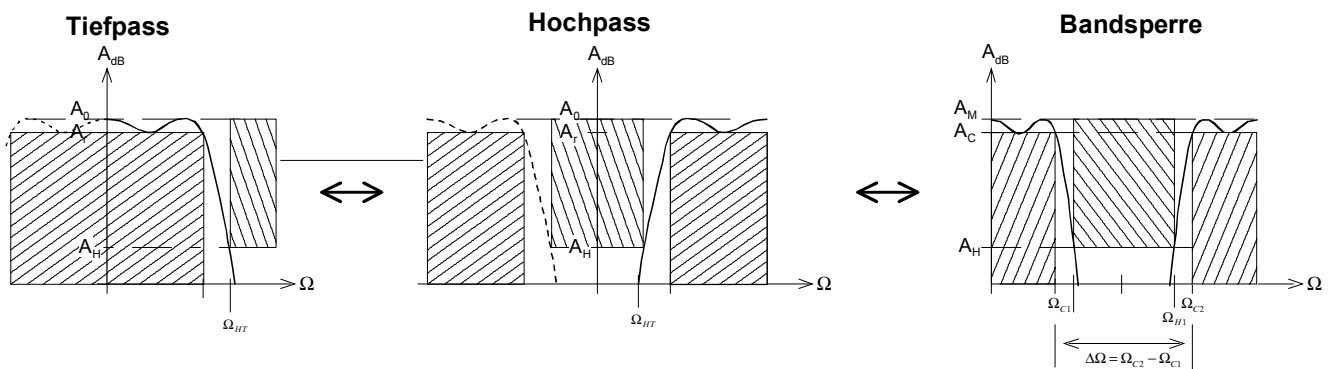


Bild 2-37: Tiefpass-Bandsperre Transformation durch Überführen in Hochpass mit anschließender Spiegelung bei $\Omega_0=0$ und Verschiebung zur Bandmittenfrequenz $\Omega_M=1$.

Im Prinzip wird auf einen eine Bandpass-Transformation angewandt. Die Steilheit der Flanken entspricht nicht der Steilheit des Referenz Tiefpass. Die Bandbreite $\Delta\Omega$ ist frei wählbar. Für Filter ohne Welligkeit im Sperrbereich gilt:

$$S_{PT} = \frac{1}{\frac{\omega_M}{\omega_{C2} - \omega_{C1}} \left(\frac{s_{PBS}}{\omega_M} + \frac{\omega_M}{s_{PBS}} \right)} = \frac{1}{D \left(\frac{1}{\Omega_{PBS}} - \Omega_{PBS} \right)} = \omega_m = \sqrt{\omega_{C1} \cdot \omega_{C2}} \quad (2-35)$$

$$S_{PBS} = \frac{1}{2DS_{PT}} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{S_{PT}^2} - 4D^2}}{2D}$$

$$S_{NBS} = \pm j$$

$$\Delta\Omega = \frac{\omega_{C2} - \omega_{C1}}{\omega_m} = \frac{f_{C2} - f_{C1}}{f_m} = \Omega_{C2} - \Omega_{C1}$$

$$D = \frac{1}{\Delta\Omega}$$

Tiefpass-Bandsperre Transformation

Die Güte ist bei der Bandsperre per Definition immer auf -3.01dB bezogen.

Die Transformation fügt dem PN-Diagramm konjugiert-imaginäre Nullstelle zu bis n konjugiert-imaginäre Nullstellen vorhanden sind, wobei n die Ordnung des Referenz-TP ist. Ein reeller TP-Pol erzeugt ein konjugiert komplexes Polpaar mit der Polfrequenz $\Omega_{PB}=1$. Ein konjugiert komplexer TP-Pol erzeugt zwei konjugiert komplexe Polpaare mit gleichen Polgüten. Die Polfrequenzen sind

zueinander reziprok $\Omega_{PBS1} = \frac{1}{\Omega_{PBS2}}$ und haben so eine geometrische Symmetrie zu $\Omega_M=1$. Die neu

zugefügten normierten Nullstellen liegen immer bei $\pm j$.

Die grafische Interpretation der Transformation am Beispiel eines Bandpass 3. Ordnung:

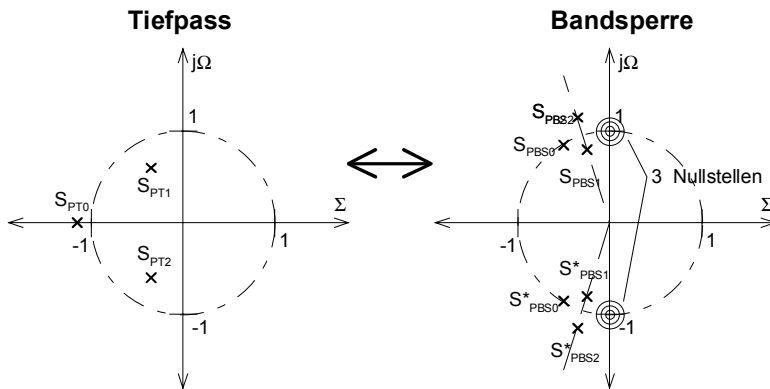


Bild 2-38: PN-Diagramm einer Tiefpass-Bandsperre Transformation eines Filters 3. Ordnung. Ein TP-Pol erzeugt jeweils ein konjugiert komplexes Polpaar und es wird eine dreifache konjugiert imaginäre Nullstelle zugefügt.

Begründung TP-BS Transformation

Die Transformation kann als Folge als eine TP-HP und HP-BP Transformation aufgefasst werden. Die Bestimmung der BP-Pole aus dem Referenz Tiefpass erfolgt durch Lösen der quadratischen Gleichung:

$$\frac{1}{S_{PT}} = \frac{1}{\Delta\Omega} \left(S_{PBS} + \frac{1}{S_{PBS}} \right) = D \left(S_{PBS} + \frac{1}{S_{PBS}} \right) \quad \rightarrow DS_{PBS}^2 - \frac{1}{S_{PT}} S_{PBS} + D = 0 \quad (2-37)$$

$$S_{PBS} = \frac{1}{2D \cdot S_{PT}} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{S_{PT}^2} - 4D^2}}{2D}$$

Für gegebene Kreisfrequenzen wird die Transformation durch Ersetzen von S mit $j\Omega$:

$$\Omega_{PT} = \frac{1}{D \left(\frac{1}{\Omega_{PBS}} - \Omega_{PBS} \right)} = \frac{\Omega_{PBS}}{D(1 - \Omega_{PBS}^2)}$$

$$\Omega_{PBS} = \frac{1}{2D \cdot \Omega_{PT}} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{\Omega_{PT}^2} + 4D^2}}{2D} \quad (2-36)$$

Beispiel 2-15: Minimale Filterordnung für Bandsperre

Welche minimale Filterordnung muss eine Tschebyscheff-Bandsperre haben um der folgenden Sperranforderung zu genügen?

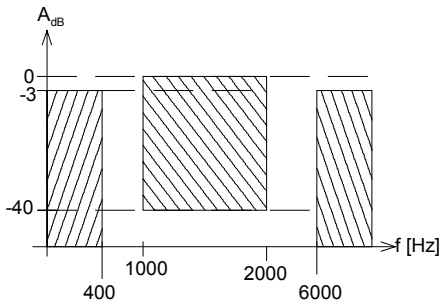


Bild 2-39: Dämpfungsschablone für Bestimmung der Filterordnung in Beispiel 2-15.

Lösung:

Man bestimmt zuerst das kleinere Ω_{CTP} des zugehörigen Referenztieffpass. Daraus berechnet man die Tiefpass-Ordnung n_{TP} . Die Bandsperren-Ordnung ist dann $2n_{TP}$.

Vorgaben: $f_{C1} := 400$ [Hz] $f_{C2} := 6000$ [Hz] $A_{rdB} := 3$ dB
 $f_{H1} := 1000$ [Hz] $f_{H2} := 2000$ [Hz] $A_{HdB} := 40$ dB

Berechnungen:

$$f_M := \sqrt{f_{C1} \cdot f_{C2}} \quad f_M = 1.549 \times 10^3 \text{ [Hz]}$$

$$\Omega_{C1} := \frac{f_{C1}}{f_M} \quad \Omega_{C1} = 0.258$$

$$\Omega_{C2} := \frac{f_{C2}}{f_M} \quad \Omega_{C2} = 3.873$$

$$\Omega_{H2} := \frac{f_{H2}}{f_M} \quad \Omega_{H2} = 1.291$$

$$\Omega_{H1} := \frac{f_{H1}}{f_M} \quad \Omega_{H1} = 0.645$$

BS-TP Transformation:

$$D := \frac{1}{\Omega_{C2} - \Omega_{C1}} \quad D = 0.277$$

$$\Omega_{CTP} := \left[D \cdot \left(\frac{1}{\Omega_{C1}} - \Omega_{C1} \right) \right]^{-1} \quad \Omega_{CTP} = 1 \quad \text{(Die Grenzfrequenzen werden auf } \Omega=1 \text{ transformiert)}$$

$$\Omega_{HTP1} := \left[D \cdot \left(\frac{1}{\Omega_{H1}} - \Omega_{H1} \right) \right]^{-1} \quad \Omega_{HTP1} = 4$$

$$\Omega_{HTP2} := \left[D \cdot \left(\frac{1}{\Omega_{H2}} - \Omega_{H2} \right) \right]^{-1} \quad \Omega_{HTP2} = 7$$

$\Omega_{HTP} := \text{wenn}(\Omega_{HTP1} < \Omega_{HTP2}, \Omega_{HTP1}, \Omega_{HTP2}) \quad \Omega_{HTP} = 4 \quad \text{Die härtere Sperrforderung gilt!}$

Ordnung des Referenztieffpass:

$$\epsilon := \sqrt{10^{0.1 A_{rdB}} - 1} \quad \epsilon = 0.998$$

$$n_{TP} := \frac{\text{arcosh} \left(\sqrt{\frac{10^{0.1 A_{HdB}} - 1}{\epsilon^2}} \right)}{\text{arcosh}(\Omega_{HTP})} \quad n_{TP} = 2.569$$

$$n_{TP} := \text{ceil}(n_{TP}) \quad n_{TP} = 3 \quad \text{(Ordnung Referenz-TP)}$$

Ordnung des Bandsperre:

$n_{BS} := 2 \cdot n_{TP} \quad n_{BS} = 6 \quad \text{(Ordnung Bandsperre)}$

Die schaltungstechnische Realisation dieses Filters setzt Teilschaltungen voraus bei denen die Pole und Nullstellen unabhängig voneinander dimensioniert werden können.

Beispiel 2-16: Berechnung normierte Pole und Nullstellen für Bandsperre 8. Ordnung

Man bestimme die normierten Bandpass-Pole für eine Butterworth-Bandsperre 8. Ordnung mit $\Delta\Omega=0.6$. Die Bandsperren-Pole/Nullstellen und die Pole des Referenztiefpass sind im PN-Diagramm grafisch darzustellen.

Vorgaben:

$\Delta\Omega := 0.6$ normierte Bandbreite
 $n = 4$ Ordnung des Referenztiefpass

$$S_{PT} = \begin{pmatrix} -0.383 + 0.924j \\ -0.924 + 0.383j \\ -0.924 - 0.383j \\ -0.383 - 0.924j \end{pmatrix}$$

Normierte Polstellen
 Butterworth Tiefpass

Transformationsvorschriften:

$$\Omega_1 := \frac{\sqrt{\Delta\Omega^2 + 4}}{2} - \frac{\Delta\Omega}{2} \quad \Omega_1 = 0.744$$

$$\Omega_2 := \frac{\sqrt{\Delta\Omega^2 + 4}}{2} + \frac{\Delta\Omega}{2} \quad \Omega_2 = 1.344$$

$$D := \frac{1}{\Omega_2 - \Omega_1} \quad D = 1.667$$

$$S_{PBS1}(S_{TP,m}) := \frac{1}{2D \cdot S_{PT,m}} + \frac{\sqrt{(S_{PT,m})^{-2} - 4D^2}}{2D}$$

Konjugiert komplexe
 normierte Bandpass Pole

$$S_{PBS2}(S_{TP,m}) := \frac{1}{2D \cdot S_{PT,m}} - \frac{\sqrt{(S_{PT,m})^{-2} - 4D^2}}{2D}$$

Normierte Polstellen
 Butterworth Bandsperre

Normierte Nullstellen
 Butterworth Bandsperre

$m := 0..2n - 1$

$S_{PBS_{2k}} := S_{PBS1}(S_{PT,k}) \quad S_{PBS_{2k+1}} := S_{PBS2}(S_{PT,k})$

$S_{NBS_{2k}} := j \quad S_{NBS_{2k+1}} := -j$

$$S_{PBS} = \begin{pmatrix} -0.084 + 0.755j \\ -0.146 - 1.309j \\ -0.244 + 0.853j \\ -0.31 - 1.083j \\ -0.244 - 0.853j \\ -0.31 + 1.083j \\ -0.084 - 0.755j \\ -0.146 + 1.309j \end{pmatrix}$$

$$S_{NBS} = \begin{pmatrix} j \\ -j \\ j \\ -j \\ j \\ -j \\ j \\ -j \end{pmatrix}$$

Lage der Pol- und Nullstellen Butterworth
 Tiefpass 4. Ordnung-Bandsperre 8. Ordnung

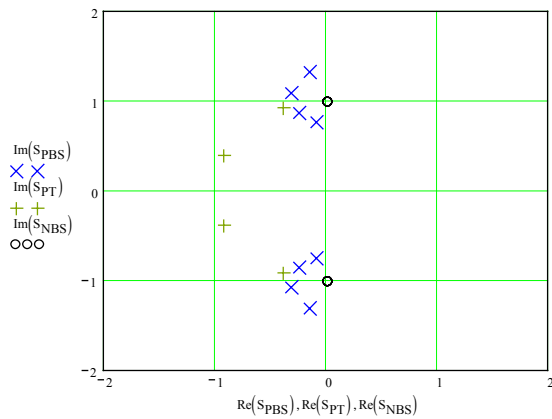


Bild 2-40: PN-Diagramm der TP-BP Transformation für einen Tiefpass 3. Ordnung nach Beispiel 2-16.

Legende:
 + Tiefpass-Pol
 x Bandsperren-Pol
 o Bandsperren-Nullstelle

Beispiel 2-17: Dimensionierung Butterworth-Bandsperre

Folgende Sperranforderung ist mit Bandsperren-Teilfiltern nach Fliege zu realisieren. Die Flanken sollen Butterworth-Charakteristik aufweisen.

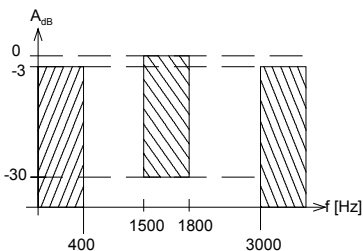


Bild 2-41: Dämpfungsschablone für Dimensionierung in Beispiel 2-17.

Vorgaben: $f_{C1} := 1000$ [Hz] $f_{C2} := 3000$ [Hz] $A_{HdB} := 10$ [dB] Min. Sperrdämpfung
 $f_{H1} := 1500$ [Hz] $f_{H2} := 1800$ [Hz] $A_{mdB} := 0$ [dB] Verstärkung bei Durchlass

Berechnungen:

$$f_M := \sqrt{f_{C1} \cdot f_{C2}} \quad f_M = 1.732 \times 10^3$$

$$\Omega_{C1} := \frac{f_{C1}}{f_M} \quad \Omega_{C2} := \frac{f_{C2}}{f_M} \quad \Omega_{H2} := \frac{f_{H2}}{f_M} \quad \Omega_{H1} := \frac{f_{H1}}{f_M}$$

$$\Omega_{C1} = 0.577 \quad \Omega_{C2} = 1.732 \quad \Omega_{H2} = 1.039 \quad \Omega_{H1} = 0.866$$

BP-TP-Transformation, Referenz-Tiefpass:

$$D := \frac{1}{\Omega_{C2} - \Omega_{C1}} \quad D = 0.866$$

$$\Omega_{CTP} := \frac{\Omega_{C1}}{D \cdot (1 - \Omega_{C1}^2)} \quad \Omega_{HTP1} := \frac{\Omega_{H1}}{D \cdot (1 - \Omega_{H1}^2)} \quad \Omega_{HTP2} := \left| \frac{\Omega_{H2}}{D \cdot (1 - \Omega_{H2}^2)} \right|$$

$$\Omega_{CTP} = 1 \quad \Omega_{HTP1} = 4 \quad \Omega_{HTP2} = 15$$

$$\Omega_{HTP} := \text{wenn}(\Omega_{HTP1} < \Omega_{HTP2}, \Omega_{HTP1}, \Omega_{HTP2}) \quad \Omega_{HTP} = 4 \quad \text{Die härtere Sperrforderung gilt!}$$

$$n_{TP} := \frac{\ln(10^{0.1 \cdot A_{HdB}} - 1)}{2 \cdot \ln(\Omega_{HTP})} \quad n_{TP} = 0.792$$

$$n_{TP} := \text{ceil}(n_{TP}) \quad n_{TP} = 1 \quad \text{Ordnung des Referenztieffpass}$$

Normierte Butterworth-Tiefpass Pole der Ordnung nTP:

$$k := 0..n_{TP} - 1$$

$$S_{PT_k} := -\sin\left(\frac{1 + 2 \cdot k}{2 \cdot n_{TP}} \cdot \pi\right) + j \cdot \cos\left(\frac{1 + 2 \cdot k}{2 \cdot n_{TP}} \cdot \pi\right)$$

$$m := 0, 1.. \text{trunc}\left(\frac{n_{TP} - 1}{2}\right) \quad \text{Indizes der Teilfilter}$$

$$\Omega_{PT_m} := |S_{PT_m}| \quad S_{PT} = (-1) \quad \Omega_{PT} = (1) \quad \text{normierte Polfrequenz des Referenztieffpass}$$

Tiefpass-Bandsperren Transformation

$$S_{PBS1}(S_{PT}, m) := \frac{1}{2D \cdot S_{PT_m}} + \frac{\sqrt{(S_{PT_m})^{-2} - 4D^2}}{2D} \quad \text{Konjugiert komplexe normierte Bandsperren Pole}$$

$$S_{PBS2}(S_{PT}, m) := \frac{1}{2D \cdot S_{PT_m}} - \frac{\sqrt{(S_{PT_m})^{-2} - 4D^2}}{2D}$$

$$S_{PBS_{2k}} := S_{PBS1}(S_{PT}, k) \quad S_{PBS_{2k+1}} := S_{PBS2}(S_{PT}, k)$$

$$\Omega_{PBS_k} := |S_{PBS_k}| \quad Q_{PBS_k} := \frac{-\Omega_{PBS_k}}{2 \cdot \text{Re}(S_{PBS_k})} \quad S_{PBS} = \begin{pmatrix} -0.577 + 0.816i \\ -0.577 - 0.816i \end{pmatrix}$$

$$Q_{PBS} = (0.866) \quad \Omega_{PBS} = (1) \quad \text{Normierte Pole und Butterworth Bandsperre der Ordnung 2n.}$$

Dimensionierung aktives Teilfilter nach CHEN,'Circuit and Filters Handbook', S.2397

$$Q_p := Q_{PBS_0} \quad \Omega_p := \Omega_{PBS_0} \quad \omega_M := 2\pi f_M$$

$$Q_p = 0.866 \quad \Omega_p = 1 \quad f_M = 1.732 \times 10^3$$

$$C_4 := 10 \cdot 10^{-9} \text{ [F]} \quad R_5 := 10 \cdot 10^3 \text{ [\Omega]} \quad R_1 := 10 \cdot 10^3 \text{ [\Omega]} \quad (\text{Wahl})$$

Berechnung der Elementwerte:

$$C_6 := C_4 \quad R_3 := \frac{1}{R_5 \cdot C_6 \cdot C_4 \cdot \Omega_p^2 \cdot \omega_M^2}$$

$$R_2 := R_1$$

$$R_6 := \frac{Q_p}{C_6 \cdot \Omega_p \cdot \omega_M}$$

$$R_{6a} := 2R_6 \quad R_{6b} := 2R_6$$

Resultate:

$$R_1 = 1 \times 10^4 \text{ [\Omega]} \quad R_2 = 1 \times 10^4 \text{ [\Omega]} \quad R_3 = 8.443 \times 10^3 \text{ [\Omega]}$$

$$R_5 = 1 \times 10^4 \text{ [\Omega]} \quad R_{6a} = 1.592 \times 10^4 \text{ [\Omega]} \quad R_{6b} = 1.592 \times 10^4 \text{ [\Omega]}$$

Grafik

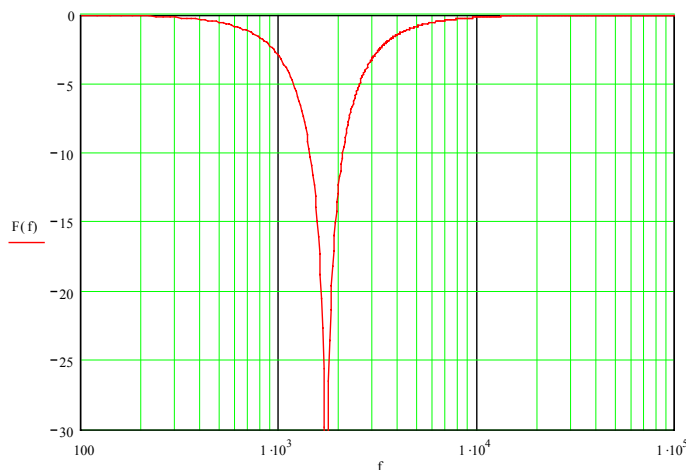
$$dB(x) := 20\log(x)$$

$$G(s, R_1, R_2, R_3, C_4, R_5, C_6, R_{6a}, R_{6b}) := \frac{s^2 \cdot C_6 \cdot C_4 \cdot \frac{1}{R_2} + s \cdot C_4 \cdot \left(\frac{1}{R_2 \cdot R_{6b}} - \frac{1}{R_1 \cdot R_{6a}} \right) + \frac{1}{R_1 \cdot R_3 \cdot R_5}}{s^2 \cdot C_4 \cdot C_6 \cdot \frac{1}{R_2} + s \cdot C_4 \cdot \left(\frac{1}{R_{6a}} + \frac{1}{R_{6b}} \right) + \frac{1}{R_1 \cdot R_3 \cdot R_5}}$$

$$F(f) := dB\left(|G(2\pi j \cdot f, R_1, R_2, R_3, C_4, R_5, C_6, R_{6a}, R_{6b})|\right)$$

f := 100, 120.. 100000

Butterworth-Bandsperre 2. Ordnung



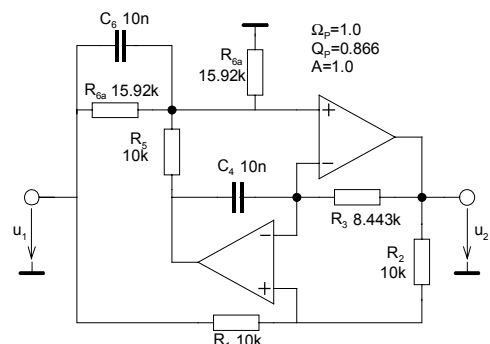
Kontrolle der Grenz- und Sperrfrequenzdämpfungen:

$F(f_M) = -316.614$	[dB]
$F(f_{C1}) = -3.01$	[dB]
$F(f_{C2}) = -3.01$	[dB]
$F(f_{H1}) = -12.304$	[dB]
$F(f_{H2}) = -12.304$	[dB]

Übertragungsfunktion quadratisches Notch-Teilfilter mit Impedanzkonverter

Die gesamte Schaltung wird:

Bild 2-42: Amplitudengang und Detailschema der dimensionierten Butterworth-Bandsperre 2. Ordnung nach Beispiel 2-17.



2.11 Bandsperre aus TP-HP oder BS-Zusammenschaltung

Bandsperren können auch aus einer Zusammenschaltung von Tief- und Hochpassfilter oder Bandpässen realisiert werden. Dieses Konzept wird direkt beim sog. Universal-Filter (KHN-Filter) verfolgt. Dabei werden die gefilterten Signale geeignet voneinander subtrahiert. Der Vorteil der Methode ist die einfache Realisation von Bandsperren, ohne dass die Nullstellen der Übertragungsfunktion explizit implementiert werden müssen. Die erreichbare Sperrdämpfung ist aber wegen der nicht idealen Operationsverstärker zum Teil deutlich geringer als bei einer direkten Realisation.

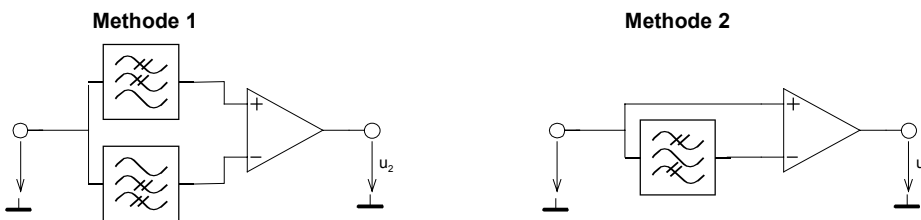


Bild 2-43: Realisation von Bandsperren ohne TP-BS Transformation. Die erreichbare Sperrdämpfung ist aber deutlich geringer als eine direkt Lösung wie in Beispiel 2-17 gezeigt.

Beispiel 2-18: Bandsperren zweiter Ordnung mit Bandpassfilter

Nachfolgend sei ohne Rechnung eine Reihe möglicher Realisationen von Bandsperren zweiter Ordnung vorgestellt. Eine Realisation mit einem Bandpass ist bei einer Bandsperre möglich, da der einzige reelle Pol des Referenziefpass in komplexen Pol transformiert wird.

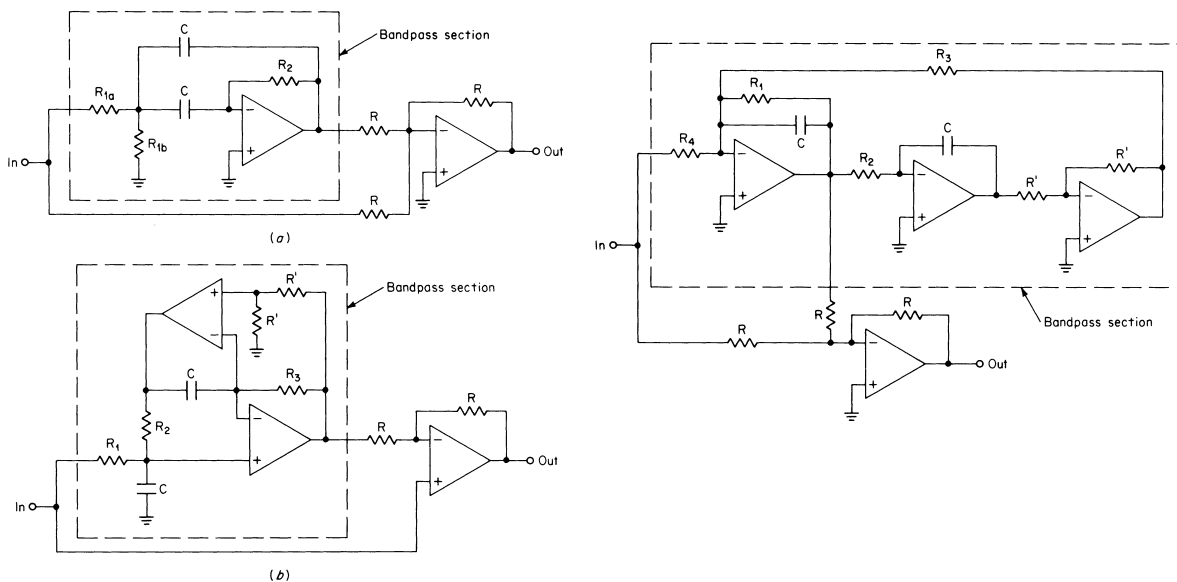


Bild 2-44: Prinzip-Beispiele von Bandsperren, realisiert mit Bandpässen.

- a.) Schaltung mit MGK Bandpass
- b.) Schaltung mit Impedanzkonverter nach Fliege
- c.) Schaltung mit Zustandsvariablen-Filter

Quelle: Williams/Taylor, "Electronic Filter Design", Williams/Taylor, McGraw-Hill

2.12 Grundglieder für aktive Teilfilter

Ziel der folgenden Betrachtungen ist es Dimensionierungsgleichungen für die Elementwerte der verschiedenen Teilschaltungen herzuleiten und die Übertragungsfunktion bei gegebenen Elementwerten.

Grundlage für die Dimensionierung der einzelnen Teilschaltungen (Glieder) sind immer Polfrequenz und Polgüte und Verstärkung im Durchlassbereich.

Für Schaltungen ohne endliche Nullstellen in der Übertragungsfunktion (TP, HP oder BP ohne Welligkeit im Sperrbereich) können relativ einfache Schaltungen verwendet werden. Bewährt haben sich Schaltungen mit Mitkopplung nach Sallen-Key, Schaltungen mit Mehrfach-Gegenkopplung, wie sog. State-Variable-Filter.

Bandsperrn höherer Ordnung, inverse Tschebyscheff- oder elliptische Filter verlangen die Implementierung endlicher Nullstellen. Diese Schaltungen sind wesentlich aufwändiger und verlangen für gute Resultate eine unabhängige Abgleichbarkeit der Pole und Nullstellen.

Wir beschränken uns in den folgenden Betrachtungen auf Glieder ersten und zweiten Grades. Aus der Fülle der Grundschaltungen zweiten Grades erfolgt eine exemplarische Auswahl mit Sallen-Key und Mehrfach-Gegenkopplung.

2.12.1 Prinzip der Aufteilung in Teilfilter (Kaskadierung)

Filter höherer Ordnung ($n > 2$) werden häufig aus Gründen der Stabilität und einfacheren Berechnungen aus Teilfiltern zweiter und erster Ordnung zusammengesetzt. Man bildet hierzu eine Kaskade von der maximal möglichen Anzahl quadratischer Filter. Bei ungerader Filterordnung wird ein lineares Glied zugefügt.

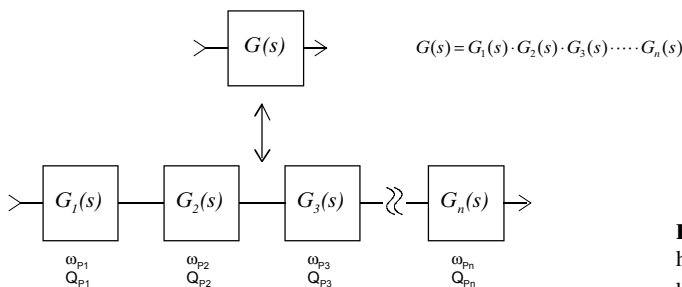


Bild 2-45: Sinnvoll ist die Realisation eines Filters höherer Ordnung als Kaskade von Teilfiltern zweiter und erster Ordnung.

Die Teilfilter werden wegen der besseren Aussteuerbarkeit in Reihenfolge aufsteigender Polgüte angeordnet.

Grundsätzlich wären auch Teilfilter dritter oder noch höherer Ordnung möglich. Die Berechnung der Elementwerte wird aber sehr aufwändig. Weiterer Nachteil dieser Schaltungen ist die schlechte Abgleichbarkeit. Idealerweise sollten bei der Filterschaltung die Polfrequenz, Polgüte und wenn notwendig die Verstärkung unabhängig abgleichbar sein und die Einstellungen sollten sich nicht gegenseitig beeinflussen.

2.12.2 Grundglieder erster Ordnung

Sie erlauben die Realisation Hoch- und Tiefpasscharakteristik mit einem reellen Pol ω_p . Die theoretische Polgüte von 0.5 fließt nicht in die Berechnungen ein.

Das Grundglied erster Ordnung wird mit allgemeinen Impedanzen und Admittanzen:

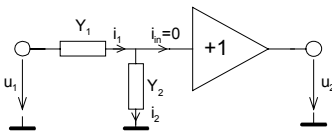


Bild 2-46: Grundglied de erster Ordnung. Je nach Wahl der Elemente für Y_1, Y_2 kann ein Hochpass- oder Tiefpassverhalten erreicht werden.

Die Übertragungsfunktion wird:

$$(u_1 - u_2)Y_1 = u_2Y_2 \quad \rightarrow G(s) = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}$$

Je nach gewünschter TP- oder HP-Funktion wird Y_1 oder Y_2 mit sC ersetzt. Man benutzt hier nur Kondensatoren, Induktivitäten werden bei aktiven Filtern, wenn immer möglich, vermieden.

Beim Tiefpass wird $Y_1 = \frac{1}{R}$, $Y_2 = sC$ und die Übertragungsfunktion lautet:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + sC} = \frac{1}{1 + sRC}$$

**Übertragungsfunktion TP
1. Ordnung** (2-38)

Die Bestimmung der Elementwerte R und C erfolgt über einen Koeffizientenvergleich mit der entnormierten Tiefpass-Übertragungsfunktion:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\omega_p} s} = \frac{1}{1 + sRC}$$

Bei Gleichheit müssen auf beiden Seiten die Koeffizienten in den Nennerpolynomen gleich sein. Man erhält daher die Beziehung:

$$\frac{1}{\omega_p} = RC = \frac{1}{\Omega_p \cdot \omega_C}$$

Normalerweise werden bei einer Dimensionierung die Kondensatoren vorgegeben, da Kondensatoren mit kleinen Toleranzen (1%) nur in grob abgestuften E-Reihen kostengünstig erhältlich sind, Widerstände aber problemlos in E-48 oder E-96 Abstufung.

Bei Vorgabe des Kondensators C wird bei gegebener Polfrequenz ω_p der Widerstand:

$$R = \frac{1}{C \cdot \omega_p} = \frac{1}{C \cdot \omega_C \cdot \Omega_p}$$

**Dimensionierung TP
1. Ordnung** (2-39)

Analog wird für den Hochpass erster Ordnung mit $Y_1 = sC, Y_2 = \frac{1}{R}$:

$$G(s) = \frac{sC}{sC + \frac{1}{R}} = \frac{sRC}{1 + sRC} \quad \text{Übertragungsfunktion HP 1. Ordnung} \quad (2-40)$$

Der Koeffizientenvergleich mit dem entnormierten Hochpass erster Ordnung ergibt:

$$\frac{\frac{1}{\omega_p} s}{1 + \frac{1}{\omega_p} s} = \frac{sRC}{1 + sRC}$$

$$\frac{1}{\omega_p} = RC = \frac{1}{\Omega_p \cdot \omega_c} \quad \rightarrow R = \frac{1}{C \cdot \Omega_p \cdot \omega_c} = \frac{1}{C \cdot \omega_p} \quad \text{Dimensionierung HP 1. Ordnung} \quad (2-41)$$

2.12.3 Grundglieder zweiter Ordnung

Für Grundglieder zweiter Ordnung existieren zahlreiche verschiedene Schaltungsarten. Sie unterscheiden sich im Schaltungsaufwand, d.h. Anzahl Operationsverstärker, Abgleichbarkeit, erreichbare und einstellbare Verstärkung/Polgüte und Sensitivitäten.

Die Sensitivitäten beschreiben wie stark sich eine Streuung eines Parameters, z.B. Widerstand oder Kondensator auf die Filtereigenschaften auswirken.

Universell einsetzbar und einfach zu dimensionieren sind die Schaltungen nach Sallen-Key und Mehrfach-Gegenkopplung. Sie erlauben eine einfache Realisation aktiver TP, HP und BP-Filter ohne Welligkeit im Sperrbereich.

Schaltung nach Sallen-Key

Die Schaltung arbeitet mit Einfach-Mitkopplung. Sie wurde 1955 durch R. Sallen und P. Key vorgestellt. Sie zeichnet sich durch ihre Einfachheit und die günstigen Empfindlichkeitseigenschaften bezüglich Bauelementetoleranzen aus. Die allgemeine Schaltung für Teilfilter zweiter Ordnung ist:

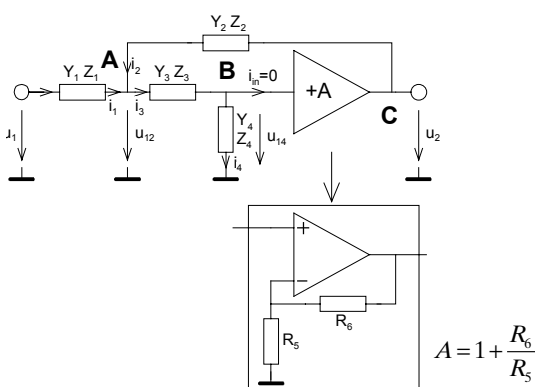


Bild 2-47: Schaltung für quadratisches Teilfilter nach Sallen-Key mit Einfach-Mitkopplung und einstellbarer Verstärkung A. Je nach Wahl der Elemente für die Impedanzen/ Admittanzen können TP, HP oder BP realisiert werden.

In den Knoten A, B und C gilt:

$$A: \quad \frac{u_1 - u_{12}}{Z_1} + \frac{u_2 - u_{12}}{Z_2} = \frac{u_{12} - u_{14}}{Z_3}$$

$$B: \quad \frac{u_{12} - u_{14}}{Z_3} = \frac{u_{14}}{Z_4}$$

$$C: \quad u_2 = A \cdot u_{14}$$

Die Auflösung nach $u_2(u_1)$ erfolgt in einem ersten Schritt durch Einsetzen von (C) in (A) und (B). Es

verbleibt ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten das ohne Probleme nach u_2 aufgelöst werden kann:

$$A: \quad \frac{u_1 - u_{12}}{Z_1} + \frac{u_2 - u_{12}}{Z_2} = \frac{u_{12} - u_{14}}{Z_3}$$

$$B: \quad \frac{u_{12} - u_{14}}{Z_3} = \frac{u_{14}}{Z_4}$$

$$C: \quad u_2 = A \cdot u_{14} \quad u_{14} = \frac{u_2}{A}$$

$$(A-C): \quad \frac{u_1 - u_{12}}{Z_1} + \frac{u_2 - u_{12}}{Z_2} = \frac{u_{12} - \frac{u_2}{A}}{Z_3}$$

$$(B-C): \quad \frac{u_{12} - \frac{u_2}{A}}{Z_3} = \frac{u_2}{Z_4}$$

Die Lösung wird

$$G(s) = \frac{u_2}{u_1} = \frac{A \cdot Z_2 Z_4}{Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 (1-A) + Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2} = \frac{A \cdot Y_1 Y_3}{Y_1 Y_4 + Y_2 Y_4 + Y_2 Y_3 (1-A) + Y_1 Y_3 + Y_3 Y_4} \quad (2-42)$$

Die Definition der Übertragungscharakteristik erfolgt durch geeignetes Einsetzen von Widerständen und Kondensatoren bei den Admittanzen. (Bei der Admittanzdarstellung wird die entstehende Übertragungsfunktion direkt ersichtlich.)

Tiefpass

Man erhält ein Tiefpassglied, wenn $Y_1 = \frac{1}{R_1}, Y_2 = sC_2, Y_3 = \frac{1}{R_3}, Y_4 = sC_4$.

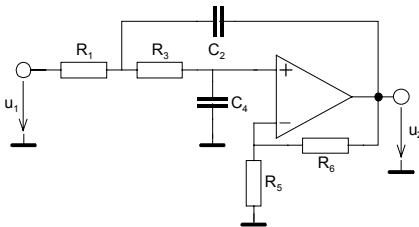


Bild 2-48: Tiefpass nach Sallen-Key 2. Ordnung mit einstellbarer Verstärkung A.

$$G(s) = \frac{A \cdot \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} sC_4 + sC_2 sC_4 + sC_2 \frac{1}{R_3} (1-A) + \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_3} sC_4} = \frac{A \cdot \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} \frac{1}{R_3} + s \left(\frac{1}{R_1} C_4 + \frac{1}{R_3} C_4 + C_2 \frac{1}{R_3} (1-A) \right) + sC_2 sC_4} \quad (2-43)$$

**Übertragungsfunktion
Sallen-Key TP**

Die Elementwerte erhält man durch einen Koeffizientenvergleich mit der entnormierten Übertragungsfunktion des Tiefpass zweiter Ordnung:

$$\frac{A}{1 + \frac{1}{\omega_c \Omega_p Q_p} s + \frac{1}{\omega_c^2 \Omega_p^2} s^2} = \frac{A}{1 + s(R_3 C_4 + R_1 C_4 + R_1 C_2 (1-A)) + s^2 R_1 R_3 C_2 C_4}$$

$$I: \quad \frac{1}{\omega_c \Omega_p Q_p} = R_3 C_4 + R_1 C_4 + R_1 C_2 (1-A)$$

$$II: \quad \frac{1}{\omega_c^2 \Omega_p^2} = R_1 R_3 C_2 C_4$$

Die Auflösung nach R_1 und R_3 ist mit erheblichen algebraischen Umformungen verbunden. Eine rasche Lösung kann unter Zuhilfenahme eines Computer-Algebra Paketes gefunden werden. Die

rasche Lösung kann unter Zuhilfenahme eines Computer-Algebra Paketes gefunden werden. Die Lösung für R_1 und R_3 wird mit MAPLE V:

```

Maple 6
File Edit View Insert Format Spreadsheet Options Window Help
Sallen-Key TP Herleitung Dimensionierung.mws
GdTP:=(1+1/(Wp * Qp) * s + 1/Wp^2 * s^2); # Nennerpolynom der entnormierten Tiefpass Definition
G:=G; # Zuvor berechnetes G(s) des Sallen-Key Tiefpass
eqn:={coeff(denom(G),s,1)=coeff(GdTP,s,1), # Gleichungssystem fuer Koeffizientenvergleich (zu s^2, s^2)
coeff(denom(G),s,2)=coeff(GdTP,s,2)};
lsg:=solve(eqn,{R1,R3}); # RootOf aufoesen
lsg:=evalf(allvalues(lsg));
simplify(lsg[1,1]);
simplify(lsg[2,2]);
simplify(lsg[2,1]);
simplify(lsg[1,2]);

GdTP = 1 + \frac{s}{W_p Q_p} + \frac{s^2}{W_p^2}
G = \frac{A}{R_1 R_3 s^2 C_4 C_2 + (R_3 C_4 + R_1 C_4 - R_1 A C_2 + R_1 C_2) s + 1}
eqn = (R_3 C_4 + R_1 C_4 - R_1 A C_2 + R_1 C_2 = \frac{1}{W_p Q_p}, R_1 R_3 C_4 C_2 = \frac{1}{W_p^2})
R_3 = .5000000000 \frac{C_2 + \sqrt{C_2 (C_2 - 4. C_4 Q_p^2 + 4. C_2 A Q_p^2 - 4. C_2 Q_p^2)}}{Q_p W_p C_2 C_4}
R_3 = .5000000000 \frac{C_2 - 1. \sqrt{C_2 (C_2 - 4. C_4 Q_p^2 + 4. C_2 A Q_p^2 - 4. C_2 Q_p^2)}}{Q_p W_p C_2 C_4}
R_1 = -.5000000000 \frac{C_2 + \sqrt{C_2 (C_2 - 4. C_4 Q_p^2 + 4. C_2 A Q_p^2 - 4. C_2 Q_p^2)}}{C_2 Q_p (-1. C_4 + A C_2 - 1. C_2) W_p}
R_1 = -.5000000000 \frac{C_2 - 1. \sqrt{C_2 (C_2 - 4. C_4 Q_p^2 + 4. C_2 A Q_p^2 - 4. C_2 Q_p^2)}}{C_2 Q_p (-1. C_4 + A C_2 - 1. C_2) W_p}
    
```

Zusammengefasst erhält man folgende Dimensionierungsgleichungen für das Tiefpassglied nach Sallen-Key bei vorgegebenen Kondensatoren:

C_2, C_4, R_5 vorgegeben:

$$C_4 < \frac{C_2 (1 + 4Q_p^2 (A_0 - 1))}{4Q_p^2} \quad C_4 \neq C_2 (A_0 - 1) \quad (\text{Bedingungen})$$

$$R_1 = \frac{1}{2\omega_c \Omega_p Q_p} \cdot \frac{C_2 \mp \sqrt{C_2^2 - 4Q_p^2 C_2 (C_4 + C_2 (1 - A_0))}}{C_2 (C_4 - C_2 (A_0 - 1))} \quad (\text{nur pos. reelle Lsg. verwenden})$$

$$= \frac{1}{(\omega_c \Omega_p)^2 R_3 C_2 C_4}$$

$$R_3 = \frac{1}{2\omega_c \Omega_p Q_p} \cdot \frac{C_2 \pm \sqrt{C_2^2 - 4Q_p^2 C_2 (C_4 + C_2 (1 - A_0))}}{C_2 C_4} \quad (\text{nur pos. reelle Lsg. verwenden})$$

$$= \frac{1}{(\omega_c \Omega_p)^2 R_1 C_2 C_4}$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{R_1 R_3 C_2 C_4}}{C_4 (R_1 + R_3) + R_1 C_2 (1 - A_0)} \quad R_6 = R_5 (A_0 - 1)$$

$$\Omega_p = \frac{1}{\omega_c \sqrt{R_1 R_3 C_2 C_4}}$$

Wird Verstärkung im Durchlassbereich $A_0=1$ gesetzt, vereinfachen sich die Formeln etwas und wir erhalten den Formelsatz, wie im Anhang aufgeführt:

Spezialfall $A_0 = 1$: (C_2, C_4 vorgegeben)

$$C_4 < \frac{C_2}{4Q_P^2} \quad (\text{Bedingung})$$

$$R_1 = \frac{C_2 \pm \sqrt{C_2^2 - 4Q_P^2 \cdot C_2 \cdot C_4}}{2C_2 \cdot C_4 \cdot Q_P \cdot \Omega_P \cdot \omega_C} = \frac{1}{R_3 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot \Omega_P^2 \cdot \omega_C^2}$$

$$R_3 = \frac{C_2 \mp \sqrt{C_2^2 - 4Q_P^2 \cdot C_2 \cdot C_4}}{2C_2 \cdot C_4 \cdot Q_P \cdot \Omega_P \cdot \omega_C} = \frac{1}{R_1 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot \Omega_P^2 \cdot \omega_C^2}$$

$$Q_P = \sqrt{\frac{R_1 R_3 C_2}{C_4 (R_1 + R_3)^2}}$$

$$\Omega_P = \frac{1}{\omega_C \sqrt{R_1 R_3 C_2 C_4}}$$

Sallen-Key Tiefpass mit $A_{oc}=1$

(2-45)

$$R_6 = 0$$

Diese Formeln ermöglichen eine universelle Dimensionierung und Analyse von Tiefpassgliedern zweiter Ordnung nach Sallen-Key.

Beispiel 2-19: Butterworth-Tiefpass nach Sallen-Key 2. Ordnung

Man realisiere ein Butterworth-Tiefpass 2. Ordnung für eine Grenzfrequenz $f_c = 250\text{Hz}$ und einer Durchlassverstärkung von 14dB. Wählbare Kondensatoren sollen mit 100nF in E3 möglichst klein gewählt werden. Man kontrolliere ferner die normierte Polfrequenz und Polgüte anhand der Elementwerte.

Vorgaben:

$$\begin{aligned} Q_P &:= 0.707 & A_{\text{0dB}} &:= 14 \text{ [dB]} & f_c &:= 0.25 \cdot 10^3 \text{ [Hz]} \\ \Omega_P &:= 1.00 & C_2 &:= 100 \cdot 10^{-9} \text{ [F]} & R_5 &:= 10 \cdot 10^3 \text{ [\Omega]} \end{aligned}$$

Dimensionierung SK 2. Ordnung bei gegebenen Kondensatorwerten C_2, C_4 :

Berechnungen:

$$\omega_C := 2 \cdot \pi \cdot f_C$$

$$A := 10^{0.05 A_{\text{0dB}}} \quad A = 5.012$$

$$C_{4\text{max}} := \frac{C_2 \cdot [1 + 4Q_P^2 \cdot (A - 1)]}{4Q_P^2} \quad C_{4\text{max}} = 4.512 \times 10^{-7} \text{ [F]} \quad C_4 := 100 \cdot 10^{-9} \text{ [F (Wahl)]}$$

$$R_{11} := \frac{1}{2 \cdot \omega_C \cdot \Omega_P \cdot Q_P \cdot C_2} \cdot \frac{C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4 \cdot Q_P^2 \cdot C_2 \cdot [C_4 + C_2 \cdot (1 - A)]}}{C_4 - C_2 \cdot (A - 1)} \quad R_{11} = -5.456 \times 10^3 \text{ [\Omega]}$$

$$R_{12} := \frac{1}{2 \cdot \omega_C \cdot \Omega_P \cdot Q_P \cdot C_2} \cdot \frac{C_2 - \sqrt{C_2^2 - 4 \cdot Q_P^2 \cdot C_2 \cdot [C_4 + C_2 \cdot (1 - A)]}}{C_4 - C_2 \cdot (A - 1)} \quad R_{12} = 2.466 \times 10^3 \text{ [\Omega]}$$

$$R_{31} := \frac{1}{2 \cdot \omega_C \cdot \Omega_P} \cdot \frac{C_2 - \sqrt{C_2^2 - 4 \cdot Q_P^2 \cdot C_2 \cdot [C_4 + C_2 \cdot (1 - A)]}}{Q_P \cdot C_2 \cdot C_4} \quad R_{31} = -7.428 \times 10^3 \text{ [\Omega]}$$

$$R_{32} := \frac{1}{2 \cdot \omega_C \cdot \Omega_P} \cdot \frac{C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4 \cdot Q_P^2 \cdot C_2 \cdot [C_4 + C_2 \cdot (1 - A)]}}{Q_P \cdot C_2 \cdot C_4} \quad R_{32} = 1.643 \times 10^4 \text{ [\Omega]}$$

Wahl: $R_1 := R_{12}$ $R_3 := R_{32}$ (nur pos. Wertepaar verwenden)

$$R_6 := (A - 1) \cdot R_5 \quad R_6 = 4.012 \times 10^4 \text{ [\Omega]}$$

Resultate:

$$R_1 = 2.466 \times 10^3 \text{ [\Omega]} \quad C_2 = 1 \times 10^{-7} \text{ [F]} \quad R_3 = 1.643 \times 10^4 \text{ [\Omega]} \quad C_4 = 1 \times 10^{-7} \text{ [F]}$$

$$R_5 = 1 \times 10^4 \text{ [\Omega]} \quad R_6 = 4.012 \times 10^4 \text{ [\Omega]}$$

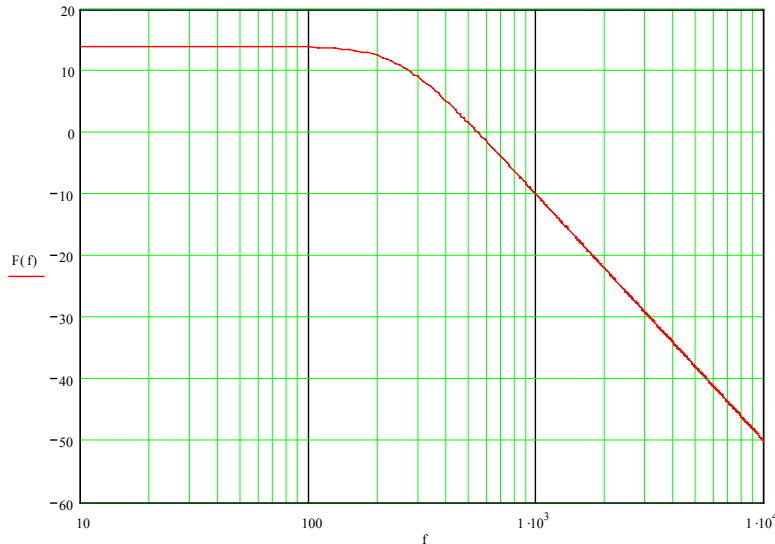
Grafik: $\text{dB}(x) := 20 \cdot \log(x)$

$$G(s) := \frac{A}{R_1 \cdot R_3 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot s^2 + [R_3 \cdot C_4 + R_1 \cdot C_2 \cdot (1 - A) + R_1 \cdot C_4] \cdot s + 1}$$

Übertragungsfunktion TP
nach Sallen-Key 2. Ordnung

$$F(f) := \text{dB}(|G(j2\pi \cdot f)|)$$

$f := 10, 20, \dots, 10000$



Kontrollwerte:

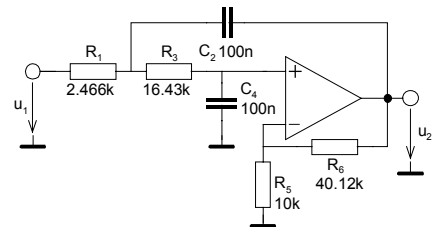
$F(0) = 14$ [dB] Dämpfung (Verstärkung) bei 0Hz

$F(f_c) = 10.988$ [dB] Dämpfung bei Grenzfrequenz f_c

$$Q_p := \frac{\sqrt{R_1 \cdot R_3 \cdot C_2 \cdot C_4}}{C_4 \cdot (R_1 + R_3) + R_1 \cdot C_2 \cdot (1 - A)} \quad Q_p = 0.707 \quad \text{normierte Polgüte}$$

$$\Omega_p := \frac{1}{\omega_c \sqrt{R_1 \cdot R_3 \cdot C_2 \cdot C_4}} \quad \Omega_p = 1 \quad \text{normierte Polfrequenz}$$

Bild 2-49: Amplitudengang und Detailschema des Tiefpass 2. Ordnung nach Beispiel 2-19.



Die gesamte Schaltung wird mit den berechneten Elementen:

Hochpass

Das Hochpassglied zweiter Ordnung ergibt sich wenn $Y_1 = sC_1, Y_2 = \frac{1}{R_2}, Y_3 = sC_3, Y_4 = \frac{1}{R_4}$.

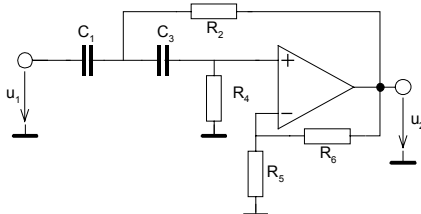


Bild 2-50: Hochpass nach Sallen-Key 2. Ordnung mit einstellbarer Verstärkung A.

Übertragungsfunktion Sallen-Key HP

$$G(s) = \frac{A \cdot sC_1sC_3}{sC_1sC_3 + s\left(sC_1\frac{1}{R_4} + sC_3\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2}sC_3(1-A)\right) + \frac{1}{R_2}\frac{1}{R_4}} = \frac{A \cdot s^2C_1C_3R_4R_2}{1 + s(R_2(C_1 + C_3) + R_4C_3(1-A)) + s^2C_1C_3R_2R_4} \quad (2-46)$$

Die Elementwerte erhält man durch Koeffizientenvergleich mit der entnormierten Übertragungsfunktion des Hochpass zweiter Ordnung. Das Vorgehen ist genau gleich wie beim Tiefpass und wir

erhalten auch dieselben Resultate:

C_1, C_3, R_5 vorgegeben

$$R_2 = \frac{1}{2\omega_c \Omega_p Q_p} \frac{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4Q_p^2 C_1 ((C_1 + C_3)(A_\infty - 1))}}{(C_1 + C_3)C_1}$$

(nur pos. reelle Lsg. verwenden)

$$= \frac{1}{(\omega_c \Omega_p)^2 R_4 C_1 C_3}$$

(2-47)

$$R_4 = \frac{1}{2\omega_c \Omega_p Q_p} \frac{C_1 \mp \sqrt{C_1^2 + 4Q_p^2 C_1 ((C_1 + C_3)(A_\infty - 1))}}{C_1 C_3 (1 - A_\infty)}$$

(nur pos. reelle Lsg. verwenden)

$$= \frac{1}{(\omega_c \Omega_p)^2 R_2 C_1 C_3}$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{R_2 R_4 C_1 C_3}}{R_2 (C_1 + C_3) + R_4 C_3 (1 - A_\infty)}$$

$$R_6 = R_5 (A_\infty - 1)$$

$$\Omega_p = \frac{1}{\omega_c \sqrt{R_2 R_4 C_1 C_3}}$$

Besonders einfach werden die Dimensionierungsgleichungen, wenn die Durchlassverstärkung $A=1$ gesetzt wird:

$C_1, C_3, A_\infty = 1$ (vorgegeben)

$$R_2 = \frac{1}{\omega_c \Omega_p Q_p (C_1 + C_3)}$$

$$R_4 = \frac{Q_p (C_1 + C_3)}{\omega_c \Omega_p C_1 C_3}$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{R_2 R_4 C_1 C_3}}{C_3 (R_2 + R_4)}$$

$$R_6 = 0$$

$$\Omega_p = \frac{1}{\omega_c \sqrt{R_2 R_4 C_1 C_3}}$$

Sallen-Key Hochpass mit $A_\infty=1$

(2-48)

Beispiel 2-20: Tschebyscheff-Hochpass nach Sallen-Key 2. Ordnung

Man realisiere ein Tschebyscheff-Hochpass 2. Ordnung mit Welligkeit $A_r=1\text{dB}$ für eine Grenzfrequenz $f_c=2000\text{Hz}$ und einer Durchlassverstärkung von $A_{\infty\text{dB}}=2\text{dB}$. Wählbare Kondensatoren sollen mit 1nF in E12 möglichst klein gewählt werden.

Vorgaben:

$Q_p := 0.956520071$ $\Omega_p := 1.050004918$ (Referenz-TP Daten, aus Tabelle gelesen)
 $f_c := 2\text{kHz}$ $C_1 := 1\text{nF}$ (Wahl) $R_5 := 10\text{k}\Omega$ (Wahl)
 $C_3 := 1\text{nF}$ (Wahl) $A_{dB} := 2 - 1$ Welligkeit ist abzuziehen, damit kein Überschwinger

Dimensionierung SK 2. Ordnung bei gegebenen Kondensatorwerten C_1, C_3 und $A > 1$:

Berechnungen:

$\omega_c := 2 \cdot \pi \cdot f_c$ $A := 10^{0.05 A_{dB}}$ (A muss > 1 sein, sonst ist die andere Formel zur Berechnung von R_4 zu verwenden!)

$\Omega_p := \frac{1}{\Omega_p}$ TP-HP Transformation des Poles

$$R_{21} := \frac{1}{2 \cdot \omega_c \cdot \Omega_p} \cdot \frac{C_1 + \sqrt{C_1^2 + 4 \cdot Q_p^2 \cdot C_1 \cdot [(C_3 + C_1) \cdot (A - 1)]}}{C_1 \cdot Q_p \cdot (C_1 + C_3)} \quad R_{21} = 51.887 \times 10^3 \Omega$$

$$R_{22} := \frac{1}{2 \cdot \omega_c \cdot \Omega_p} \cdot \frac{C_1 - \sqrt{C_1^2 + 4 \cdot Q_p^2 \cdot C_1 \cdot [(C_3 + C_1) \cdot (A - 1)]}}{C_1 \cdot Q_p \cdot (C_1 + C_3)} \quad R_{22} = -8.209 \times 10^3 \Omega$$

$$R_{41} := \frac{1}{2 \cdot \omega_c \cdot \Omega_p} \cdot \frac{C_1 - \sqrt{C_1^2 + 4 \cdot Q_p^2 \cdot C_1 \cdot [(C_3 + C_1) \cdot (A - 1)]}}{(1 - A) \cdot C_1 \cdot C_3 \cdot Q_p} \quad R_{41} = 134.557 \times 10^3 \Omega$$

$$R_{42} := \frac{1}{2 \cdot \omega_c \cdot \Omega_p} \cdot \frac{C_1 + \sqrt{C_1^2 + 4 \cdot Q_p^2 \cdot C_1 \cdot [(C_3 + C_1) \cdot (A - 1)]}}{(1 - A) \cdot C_1 \cdot C_3 \cdot Q_p} \quad R_{42} = -850.473 \times 10^3 \Omega$$

$$R_6 := (A - 1) \cdot R_5 \quad R_6 = 1.22 \times 10^3 \Omega$$

Wahl: $R_2 := R_{21}$ $R_4 := R_{41}$ (Wenn $C_4 < C_2$ nur das positive Paar wählen)

Resultate:

$R_2 = 51.887 \times 10^3 \Omega$ $C_1 = 1 \times 10^{-9} \text{F}$ $R_4 = 134.557 \times 10^3 \Omega$ $C_3 = 1 \times 10^{-9} \text{F}$
 $R_5 = 10 \times 10^3 \Omega$ $R_6 = 1.22 \times 10^3 \Omega$

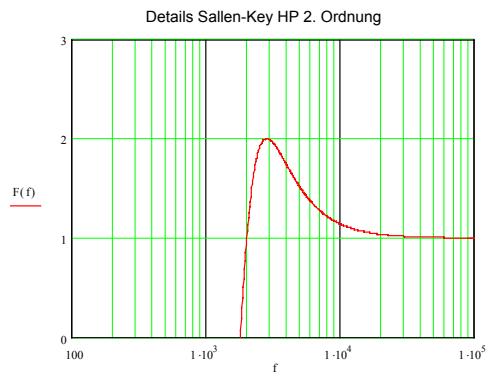
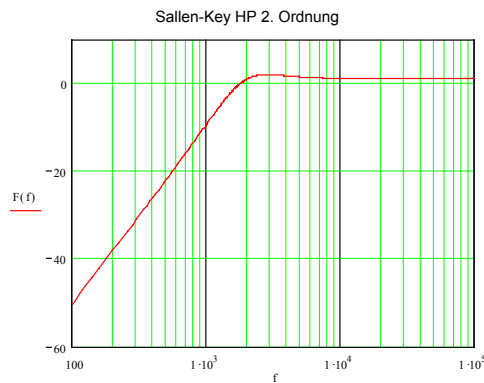
Grafik: $\text{dB}(x) := 20 \cdot \log(x)$

$$G(s) := \frac{A R_2 \cdot R_4 \cdot C_1 \cdot C_3 \cdot s^2}{R_2 \cdot R_4 \cdot C_1 \cdot C_3 \cdot s^2 + [R_4 \cdot C_3 \cdot (1 - A) + R_2 \cdot C_1 + R_2 \cdot C_3] \cdot s + 1}$$

Übertragungsfunktion HP nach Sallen-Key 2. Ordnung

$$F(f) := \text{dB}(|G(f \cdot 2\pi \cdot j)|)$$

$f := 100, 120, \dots, 100000$



Kontrollwerte:

$F(f_c) = 1$ [dB] Dämpfung (Verstärkung) bei Grenzfrequenz f_c

$F(1\text{MHz}) = 1 \times 10^0$ [dB] Asymptot. Dämpfung bei hohen Frequenzen

$$Q_p := \frac{\sqrt{C_1 \cdot C_3 \cdot R_2 \cdot R_4}}{R_2 \cdot (C_1 + C_3) + C_3 \cdot R_4 \cdot (1 - A)} \quad Q_p = 956.52 \times 10^{-3} \quad \text{Polgüte}$$

$$\Omega_p := \frac{1}{\omega_c \cdot \sqrt{C_1 \cdot C_3 \cdot R_2 \cdot R_4}} \quad \Omega_p = 952.376 \times 10^{-3} \quad \text{Normierte Polfrequenz Hochpass}$$

Bild 2-51: Berechnung und Amplitudengang des Hochpass 2. Ordnung nach Beispiel 2-20.

Bandpass

Bandpass Schaltungen mit Einfach-Mitkopplung nach Sallen-Key sind möglich. Sie hat gemäss [LAN94] zwar den Vorteil, dass auch für tiefere Frequenzen kleine Kapazitätswerte benutzt werden können. Gravierende Nachteile sind aber die schlechte Abgleichbarkeit und die hohen Anforderungen an den Operationsverstärker.

Das Bandpassglied 2. Ordnung nach Sallen-Key hat gegenüber den TP- und HP-Schaltungen ein zusätzliches Element, hier C_3 :

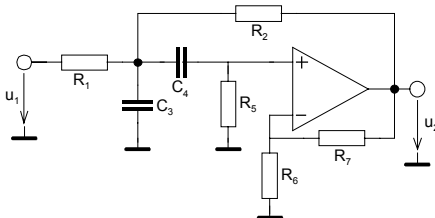


Bild 2-52: Bandpass 2. Ordnung nach Sallen-Key mit Verstärkung $A_M > 1$.

Die Übertragungsfunktion wird:

$$G(s) = \frac{\frac{R_2 R_5}{R_1 + R_2} C_4 A_M \cdot s}{1 + \frac{R_1 R_5 C_4 (1 - A_M) + R_1 R_2 (C_3 + C_4) + R_2 R_5 C_4}{R_1 + R_2} \cdot s + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} R_5 C_3 C_4 \cdot s^2} \quad (2-49)$$

$$A_M = 1 + \frac{R_7}{R_6}$$

Die Elementwerte der Widerstände bei gegebenen Kondensatorwerten, Polgüte und Polfrequenz werden mit einem Koeffizientenvergleich mit der entnormierten Bandpass-Übertragungsfunktion:

$$\frac{A_M \frac{1}{\omega_p Q_p} s}{1 + \frac{1}{\omega_p Q_p} s + \frac{1}{\omega_p^2} s^2} = \frac{\frac{R_2 R_5}{R_1 + R_2} C_4 A_M \cdot s}{1 + \frac{R_1 R_5 C_4 (1 - A_M) + R_1 R_2 (C_3 + C_4) + R_2 R_5 C_4}{R_1 + R_2} \cdot s + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} R_5 C_3 C_4 \cdot s^2} \quad (2-50)$$

Koeffizientenvergleich:

$$A_M \frac{1}{\omega_p Q_p} = \frac{R_2 R_5}{R_1 + R_2} C_4 A_M$$

$$\frac{1}{\omega_p Q_p} = \frac{R_1 R_5 C_4 (1 - A_M) + R_1 R_2 (C_3 + C_4) + R_2 R_5 C_4}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{1}{\omega_p^2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Die Lösungen für R_1, R_2 und R_5 und Q_p, Q_p werden:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{Q_P}{\omega_P C_3} & \omega_P &= \omega_M \Omega_{PB} \\
 R_2 &= \frac{1}{2} \frac{C_3 (A_M - 1) + \sqrt{C_3 (C_3 (1 - 2A_M + A_M^2) + 4Q_P^2 (C_3 + C_4) (A_M - 1))}}{\omega_P Q_P C_3 (C_3 + C_4)} \\
 R_5 &= \frac{C_3 (A_M - 1) + \sqrt{C_3 (C_3 (1 - 2A_M + A_M^2) + 4Q_P^2 (C_3 + C_4) (A_M - 1))} + 2Q_P^2 (C_3 + C_4)}{\omega_P Q_P C_4 \left[C_3 (A_M - 1) + \sqrt{C_3 (C_3 (1 - 2A_M + A_M^2) + 4Q_P^2 (C_3 + C_4) (A_M - 1))} \right]} \\
 Q_P &= \frac{\sqrt{R_1 R_2 R_5 C_3 C_4} \sqrt{R_1 + R_2}}{R_1 R_2 (C_3 + C_4) + R_1 R_5 C_4 (1 - A_M) + R_2 R_5 C_4} \\
 \Omega_P &= \frac{\sqrt{R_1 + R_2}}{\omega_M \sqrt{R_1 R_2 R_5 C_3 C_4}}
 \end{aligned} \tag{2-51}$$

Bandpässe nach Sallen-Key müssen eine Mittenverstärkung $A_M > 1$ haben. Bei $A_M = 1$ würde $R_2 = 0$ und $R_5 \rightarrow \infty$. Dies ist in der Praxis keine Einschränkung da bei mehrstufigen Bandpässen durch den Stufenkorrekturfaktor sowieso eine Verstärkung $A_k * A_M > 1$ gefordert wird. Bei einstufiger Realisation mit einem $A \leq 1$ kann R_1 als Spannungsteiler ausgebildet werden womit alle möglichen Fälle abgedeckt sind (vgl. auch Beispiel 2-21).

Beispiel 2-21: Bandpass nach Sallen-Key 2. Ordnung

Man realisiere einen Bandpass 2.Ordnung der bei den Grenzfrequenzen $f_{c1} = 1000\text{Hz}$ und $f_{c2} = 1100\text{Hz}$ eine Dämpfung von 1dB aufweist. Die Mittenfrequenzdämpfung soll 0dB betragen.

Lösung:

Da die Grenzfrequenzdämpfungen mit -1dB vorgegeben sind und das Filter 2. Ordnung ist, wählt man am einfachsten ein Tschebyscheff Referenz-Tiefpass mit Welligkeit 1dB. Die Grenzfrequenz fällt immer mit der Welligkeit zusammen. (Bemerkung: Die Welligkeit fällt hier nicht ins Gewicht, das der TP 1.Ordnung keine Welligkeit hat.)

Da das Sallen-Key Grundglied eine Durchlassverstärkung fordert, wird eine Durchlassverstärkung von $A_M = 2$ gewählt. Diese wird mit einem Spannungsteiler am Eingang wieder kompensiert. Es entsteht so gesamthaft eine Mittenfrequenzdämpfung von 0dB. Der Spannungsteiler wird durch Aufteilung des Widerstandes R_1 realisiert.

Vorgaben:

$$f_{C1} := 100\text{Hz} \quad f_{C2} := 1100\text{Hz} \quad A_M := 2 \quad (\text{gewählte Verstärkung bei Mittenfrequenz})$$

$$n := 1 \quad A_{\text{rdB}} := 1$$

Berechnungen:

$$f_M := \sqrt{f_{C1} \cdot f_{C2}} \quad f_M = 1.04881 \times 10^3 \text{ Hz}$$

$$\Omega_{C1} := \frac{f_{C1}}{f_M} \quad \Omega_{C1} = 0.953$$

$$\Omega_{C2} := \frac{f_{C2}}{f_M} \quad \Omega_{C2} = 1.049$$

BP-TP Transformation für Bestimmung Referenz Tiefpass:

$$D := \frac{1}{\Omega_{C2} - \Omega_{C1}} \quad D = 10.488$$

$$m := 0..n - 1$$

Bestimmung Tschebyscheff-Pole der Ordnung n:

$$\epsilon := \sqrt{10^{0.1 A_{\text{rdB}}} - 1} \quad \epsilon = 0.509$$

$$S_{PT_m} := -\sin\left(\frac{1+2m}{2n}\pi\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{n} \cdot \text{arsinh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) + j \cdot \cos\left(\frac{1+2m}{2n}\pi\right) \cdot \cosh\left(\frac{1}{n} \cdot \text{arsinh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$$

$$\Omega_{PT_m} := |S_{PT_m}| \quad S_{PT} = (-1.965) \quad \text{Normierter Pol Tschebyscheff Referenz Tiefpass}$$

Tiefpass-Bandpass Transformation

$$S_{PB_{2m}} := \frac{S_{PT_m} + \sqrt{(S_{PT_m})^2 - 4D^2}}{2D} \quad \text{Konjugiert komplexe normierte Bandpass Pole}$$

$$S_{PB_{2m+1}} := \frac{S_{PT_m} - \sqrt{(S_{PT_m})^2 - 4D^2}}{2D}$$

Bandpass Polgüte Normierte Bandpass Polfrequenz

$$S_{PB} = \begin{pmatrix} -0.094 - 0.996i \\ -0.094 + 0.996i \end{pmatrix}$$

Normierte Pollagen von Tschebyscheff Bandpass der Ordnung 2n.

$$k := 0..n - 1$$

$$\Omega_{PB_k} := |S_{PB_k}| \quad Q_{PB_k} := \frac{-\Omega_{PB_k}}{2 \cdot \text{Re}(S_{PB_k})} \quad Q_{PB} = (5.33683) \quad \Omega_{PB} = (1)$$

Stufenverstärkungskorrekturfaktor:

$$A_{K_k} := \frac{1}{D} \cdot \Omega_{PT_k} \cdot Q_{PB_k} \cdot A_M \quad A_K = (2) \quad \text{Stufenverstärkungskorrekturfaktor für jedes Bandpass Teilfilter}$$

Dimensionierung der SK-Bandpassfilters. C3, C4, R6 sind vorgegeben.

$$C_3 := 10\text{nF} \quad C_4 := 10\text{nF} \quad R_6 := 10\text{k}\Omega$$

$$Q_P := Q_{PB_0} \quad \Omega_P := \Omega_{PB_0} \quad A_M := A_{K_0}$$

$$\omega_M := 2\pi \cdot f_M \quad \omega_M = 6.59 \times 10^3 \text{ Hz}$$

$$R_1 := \frac{Q_P}{\Omega_P \cdot \omega_M \cdot C_3} \quad R_1 = 8.099 \times 10^4 \Omega$$

$$R_2 := \frac{1}{2} \cdot \frac{C_3 \cdot (A_M - 1) + \sqrt{C_3 \cdot [C_3 \cdot (1 - 2 \cdot A_M + A_M^2) + 4 \cdot Q_P^2 \cdot (C_3 + C_4) \cdot (A_M - 1)]}}{Q_P \cdot C_3 \cdot (C_3 + C_4) \cdot \omega_M \cdot \Omega_P} \quad R_2 = 1.14646 \times 10^4 \Omega$$

$$R_5 := \frac{C_3 \cdot (A_M - 1) + \sqrt{C_3 \cdot [C_3 \cdot (1 - 2 \cdot A_M + A_M^2) + 4 \cdot Q_P^2 \cdot (C_3 + C_4) \cdot (A_M - 1)]} + 2 \cdot Q_P^2 \cdot (C_3 + C_4)}{Q_P \cdot C_4 \cdot \omega_M \cdot \Omega_P \cdot [C_3 \cdot (A_M - 1) + \sqrt{C_3 \cdot [C_3 \cdot (1 - 2 \cdot A_M + A_M^2) + 4 \cdot Q_P^2 \cdot (C_3 + C_4) \cdot (A_M - 1)]}}] \quad R_5 = 2.293 \times 10^4 \Omega$$

$$R_7 := (A_M - 1) \cdot R_6 \qquad R_7 = 1 \times 10^4 \Omega$$

Aufteilung R1 in Spannungsteiler R1A-R1B:

$$R_{1B} := \frac{R_1}{1 - \frac{1}{A_M}} \qquad R_{1B} = 1.62 \times 10^5 \Omega$$

$$R_{1A} := \frac{R_1 \cdot R_{1B}}{R_{1B} - R_1} \qquad R_{1A} = 1.62 \times 10^5 \Omega$$

Grafik:

$$f := \text{logrange}(400, 2000, 400) \text{ Hz}$$

$$ii := 0.. \text{letzte}(f)$$

$$G(s) := \frac{R_{1B}}{R_{1B} + R_{1A}} \cdot \frac{\frac{R_5 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot A_M \cdot s \cdot C_4}{1 + \left[\frac{R_1 \cdot R_5 \cdot C_4 \cdot (1 - A_M) + R_1 \cdot R_2 \cdot (C_3 + C_4) + R_2 \cdot R_5 \cdot C_4}{R_1 + R_2} \right] \cdot s + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot R_5 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot s^2}$$

Übertragungsfunktion Bandpass
2. Ordnung nach Sallen-Key mit
Berücksichtigung des Eingangspannungsteilers

$$F_{BP_{ii}} := \text{dB}(|G(2\pi f_{ii}, j)|)$$

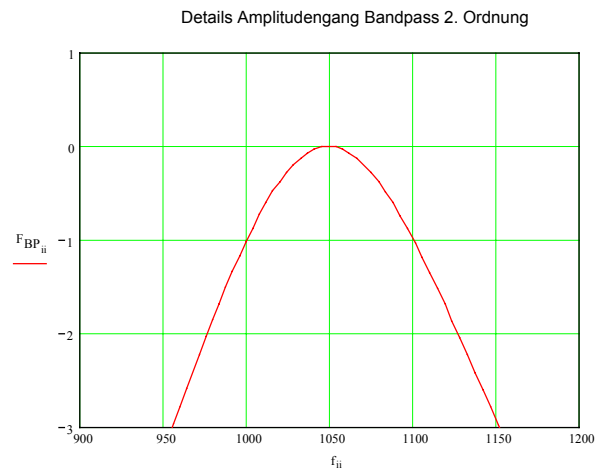
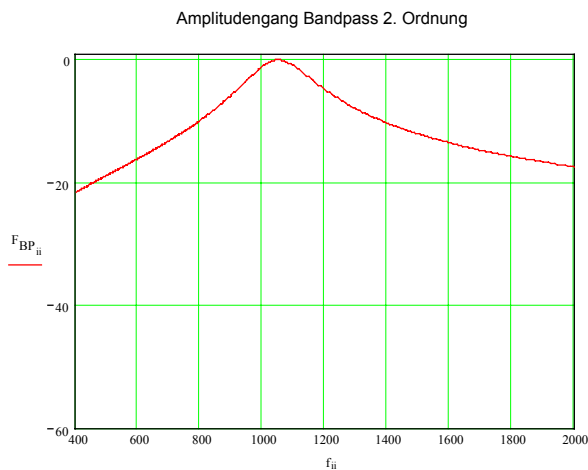
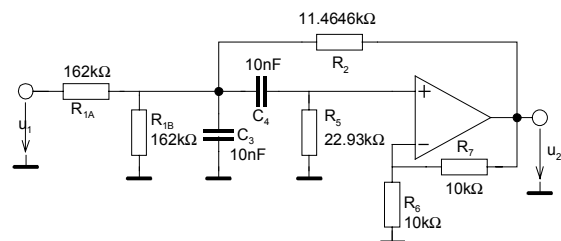


Bild 2-53: Dimensionierung, berechneter Amplitudengang und Detailschema zum Sallen-Key Bandpass 2. Ordnung nach . Beispiel 2-21



Beispiel 2-22: Bestimmung -3.01dB Frequenzen

Man bestimme für den Bandpass die normiert und entnormierten -3dB Frequenzen und zwar ausschliesslich aus den gegebenen Komponentenwerten.

Lösung:

Man bestimmt zuerst Polfrequenz und Polgüte. Daraus kann man die -3dB Frequenzen aus dem

allgemeinen Zusammenhang $\Delta\Omega_{3\text{dB}} = \frac{\Omega_{PB}}{Q_{PB}}$ und der resultierenden quadratischen Gleichung die

Frequenzen mit quadratischer Ergänzung lösen:

Vorgaben:

$$R_1 := 80.99k\Omega \quad R_2 := 11.464k\Omega \quad R_5 := 22.93k\Omega$$

$$C_3 := 10nF \quad C_4 := 10nF$$

$$R_6 := 10k\Omega \quad R_7 := 10k\Omega$$

Berechnungen:

$$A_M := 1 + \frac{R_7}{R_6} \quad A_M = 2 \quad \text{Verstärkung bei Mittenfrequenz}$$

$$Q_{PB} := \frac{\sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot R_5 \cdot C_3 \cdot C_4} \cdot \sqrt{R_1 + R_2}}{[R_1 \cdot R_2 \cdot (C_3 + C_4) + R_1 \cdot R_5 \cdot C_4 \cdot (1 - A_M) + R_2 \cdot R_5 \cdot C_4]} \quad Q_{PB} = 5.338 \quad \text{Polgüte}$$

$$f_{PB} := \frac{\sqrt{R_1 + R_2}}{2\pi \cdot \sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot R_5 \cdot C_3 \cdot C_4}} \quad f_{PB} = 1.049 \times 10^3 \text{ Hz} \quad \text{Polfrequenz des Bandpass (Hier auch Mittenfrequenz)}$$

$\Omega_{PB} := 1$ (Weil $f_{PB} = f_M$ bei 2. Ordnung)

$$\Delta\Omega_{3dB} := \frac{\Omega_{PB}}{Q_{PB}} \quad \Delta\Omega_{3dB} = 0.187 \quad \text{Normierte -3dB Bandbreite}$$

$$f_{3dB1} := \left(\frac{\Delta\Omega_{3dB}}{2} + \sqrt{\frac{\Delta\Omega_{3dB}^2}{4} + 4} \right) \cdot f_{PB} \quad f_{3dB1} = 1.152 \times 10^3 \text{ Hz}$$

Entnormierte -3dB Frequenzen

$$f_{3dB2} := \left(\frac{-\Delta\Omega_{3dB}}{2} + \sqrt{\frac{\Delta\Omega_{3dB}^2}{4} + 4} \right) \cdot f_{PB} \quad f_{3dB2} = 955.145 \text{ Hz}$$

$$\Omega_{3dB1} := \frac{\Delta\Omega_{3dB}}{2} + \sqrt{\frac{\Delta\Omega_{3dB}^2}{4} + 4} \quad \Omega_{3dB1} = 1.098$$

Normierte -3dB Frequenzen

$$\Omega_{3dB2} := \frac{-\Delta\Omega_{3dB}}{2} + \sqrt{\frac{\Delta\Omega_{3dB}^2}{4} + 4} \quad \Omega_{3dB2} = 0.911$$

2.12.4 Mehrfach-Gegenkopplung

Sie verkörpert eine weitere verbreitete Grundschaltung. Im Gegensatz zu Sallen-Key wird das Signal hier invertiert ebenso sind auch Verstärkungen $A < 1$ möglich. Die erreichbare Polgüte ist aber nach Aussagen in [HER84] kleiner und wird nur für $Q_p < 5$ empfohlen.

Grundschaltung

Aus der allgemeinen Grundschaltung in Impedanz oder Admittanzdarstellung wird durch geeignete Wahl TP-, HP- oder BP Charakteristik erreicht.

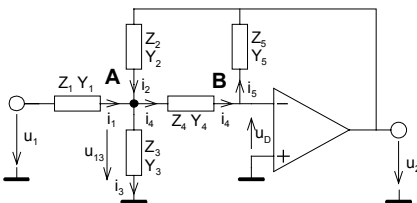


Bild 2-54: Schaltung für quadratisches Teilfilter mit Mehrfach-Gegenkopplung. Je nach Wahl der Elemente für die Impedanzen/ Admittanzen können TP, HP oder BP realisiert werden.

Die allgemeine Übertragungsfunktion wird nach Lösen des Gleichungssystems für die Knoten A und B:

$$\begin{aligned}
 A: \quad & \frac{u_1 - u_{13}}{Z_1} + \frac{u_2 - u_{13}}{Z_2} = \frac{u_{13}}{Z_3} + \frac{u_{14} - u_D}{Z_4} \\
 B: \quad & \frac{u_{14}}{Z_4} = \frac{-u_D - u_2}{Z_5} \qquad \text{OpAmp ideal} \rightarrow u_D = 0 \\
 G(s) := & \frac{u_2}{u_1} = \frac{-Z_5 Z_2 Z_3}{Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_5 Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_3} = \frac{-Y_4 Y_1}{Y_1 Y_5 + Y_2 Y_5 + Y_3 Y_5 + Y_2 Y_4 + Y_4 Y_5} \quad (2-52)
 \end{aligned}$$

Die Definition der Übertragungscharakteristik erfolgt durch geeignetes Einsetzen von Widerständen und Kondensatoren bei den Admittanzen. (Bei der Admittanzdarstellung wird die entstehende Übertragungsfunktion direkt ersichtlich.)

Tiefpass

Man erhält ein Tiefpassglied, wenn $Y_1 = \frac{1}{R_1}, Y_2 = \frac{1}{R_2}, Y_3 = sC_3, Y_4 = \frac{1}{R_4}, Y_5 = sC_5$.

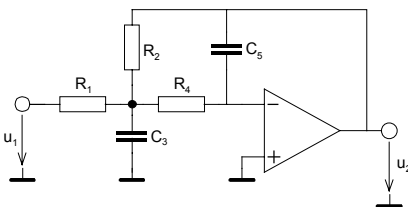


Bild 2-55: Tiefpass 2. Ordnung mit Mehrfach-Gegenkopplung.

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{-R_2}{R_1 R_2 R_4 C_5 C_3 s^2 + (R_2 R_4 C_5 + R_1 R_4 C_5 + R_1 R_2 C_5) s + R_1} = \frac{A}{R_2 R_4 C_5 C_3 s^2 + (R_4 C_5 (1 - A) + R_2 C_5) s + 1} \quad (2-53) \\
 A &= -\frac{R_2}{R_1}
 \end{aligned}$$

Die Dimensionierungsgleichungen werden mit einem Koeffizientenvergleich mit der entnormierten Tiefpass Übertragungsfunktion 2. Ordnung:

$$\begin{aligned}
 \frac{A}{\frac{1}{\omega_p^2} s^2 + \frac{1}{\omega_p Q_p} s + 1} &= \frac{A}{R_2 R_4 C_5 C_3 s^2 + (R_4 C_5 (1 - A) + R_2 C_5) s + 1} \quad (2-54) \\
 A &= -\frac{R_2}{R_1}
 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\omega_p^2} &= R_2 R_4 C_5 C_3 \\
 \frac{1}{\omega_p Q_p} &= R_4 C_5 (1 - A) + R_2 C_5
 \end{aligned}$$

Da sowieso nur die Lösung für R_p, R_y, R_4 bei gegebenen Kondensatorwerten sinnvoll ist, erhalten wir:

$$R_2 = \frac{1}{2\omega_c \Omega_p Q_p} \cdot \frac{C_3 \pm \sqrt{C_3^2 - 4Q_p^2 C_3 C_5 (1 - A_0)}}{C_3 C_5} \quad (2-55)$$

$$= \frac{1}{(\omega_c \Omega_p)^2 C_3 C_5 R_4}$$

$$R_1 = \frac{R_2}{-A_0}$$

$$R_4 = \frac{-1}{2\omega_c \Omega_p Q_p} \cdot \frac{C_3 \mp \sqrt{C_3^2 - 4Q_p^2 C_3 C_5 (1 - A_0)}}{C_3 C_5 (A_0 - 1)}$$

$$= \frac{1}{(\omega_c \Omega_p)^2 C_3 C_5 R_2}$$

$$Q_p = \frac{R_1 \sqrt{R_2 R_4 C_5 C_3}}{C_5 (R_2 R_4 + R_1 R_4 + R_1 R_2)} = \frac{\sqrt{R_2 R_4 C_5 C_3}}{R_4 C_5 (1 - A_0) + R_2 C_5}$$

$$\Omega_p = \frac{1}{\omega_c \sqrt{R_2 R_4 C_5 C_3}}$$

den Spezialfall für $A_0 = -1$ sieht man sofort und wird hier nicht weiter diskutiert.

Beispiel 2-23: MGK Tiefpass 2. Ordnung mit $A_0 = -20\text{dB}$

Man realisiere eine Butterworth-Tiefpass mit einer Anfangsdämpfung von $A_0 = -20\text{dB}$, Grenzfrequenz $f_c = 1\text{kHz}$. Wählbare Kondensatoren sind mit 10nF beginnend kleinstmöglich in E3 zu wählen.

Lösung:

Vorgaben:

$Q_p := \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Omega_p := 1.00$ (Aus Tabelle gelesen für Butterworth-TP)
 $f_c := 1\text{kHz}$ $C_5 := 10\text{nF}$ $A_{0\text{dB}} := -20$ Anfangsdämpfung

Dimensionierungsformeln MGK 2.Ordnung bei gegebenen Kondensatorwerten C3,C5:

Berechnungen:

$A_0 := -10^{0.05 \cdot A_{0\text{dB}}}$ $A_0 = -100 \times 10^{-3}$

Bedingung: $C_{3\text{min}} := 4Q_p^2 \cdot C_5 \cdot (1 - A_0)$ $C_{3\text{min}} = 22 \times 10^{-9}\text{F}$ $C_3 := 47\text{nF}$ (Wahl)

$\omega_c := 2 \cdot \pi \cdot f_c$

$R_{21} := \frac{1}{2 \cdot \omega_c \cdot \Omega_p \cdot Q_p} \cdot \frac{C_3 + \sqrt{C_3^2 - 4 \cdot Q_p^2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot (1 - A_0)}}{C_3 \cdot C_5}$ $R_{21} = 19.462 \times 10^3 \Omega$

$R_{22} := \frac{1}{2 \cdot \omega_c \cdot \Omega_p \cdot Q_p} \cdot \frac{C_3 - \sqrt{C_3^2 - 4 \cdot Q_p^2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot (1 - A_0)}}{C_3 \cdot C_5}$ $R_{22} = 3.046 \times 10^3 \Omega$

$R_{41} := \frac{-1}{2 \cdot \omega_c \cdot \Omega_p \cdot Q_p} \cdot \frac{C_3 - \sqrt{C_3^2 - 4 \cdot Q_p^2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot (1 - A_0)}}{C_3 \cdot C_5 \cdot (A_0 - 1)}$ $R_{41} = 2.769 \times 10^3 \Omega$

$R_{42} := \frac{-1}{2 \cdot \omega_c \cdot \Omega_p \cdot Q_p} \cdot \frac{C_3 + \sqrt{C_3^2 - 4 \cdot Q_p^2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot (1 - A_0)}}{C_3 \cdot C_5 \cdot (A_0 - 1)}$ $R_{42} = 17.692 \times 10^3 \Omega$

Alternative:

$R_4 := \frac{1}{(\omega_c \cdot \Omega_p)^2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot R_2}$

Wahl:

$R_2 := R_{21}$ $R_4 := R_{41}$ (Pos. Paar wählen (R21-R41 oder R22-R42))

$R_1 := \frac{R_2}{-A_0}$ $R_1 = 194.617 \times 10^3 \Omega$

Resultate:

$R_1 = 194.617 \times 10^3 \Omega$ $R_2 = 19.462 \times 10^3 \Omega$ $R_4 = 2.769 \times 10^3 \Omega$

$C_3 = 47 \times 10^{-9}\text{F}$ $C_5 = 10 \times 10^{-9}\text{F}$

Vektor mit N logarithmisch
distanzierten Elementen zwischen
 x_{start} und x_{end}

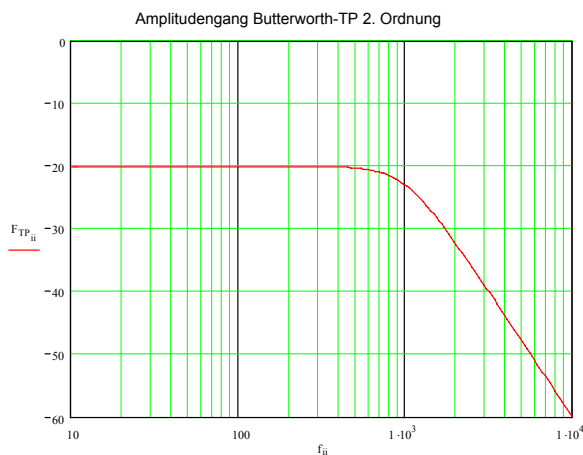
$\text{logrange}(x_{\text{start}}, x_{\text{end}}, N) := \begin{cases} a_{N-1} \leftarrow x_{\text{end}} \\ g \leftarrow \sqrt[N-1]{\frac{x_{\text{end}}}{x_{\text{start}}}} \\ \text{for } i \in 0..N-2 \\ a_i \leftarrow x_{\text{start}} \cdot g^i \\ a \end{cases}$

Grafik:

$f := \text{logrange}(10, 10000, 200)\text{Hz}$ $ii := 0.. \text{letzte}(f)$

$G(s) := \frac{A_0}{R_2 \cdot R_4 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot s^2 + [R_2 \cdot C_5 + R_4 \cdot C_3 \cdot (1 - A_0)] \cdot s + 1}$

$F_{TP_{ii}} := \text{dB}(|G(2\pi \cdot j \cdot f_{ii})|)$



Kontrollwerte:

$\text{dB}(|G(2\pi \cdot j \cdot 0\text{Hz})|) = -20 \times 10^0$ Anfangsdämpfung

$\text{dB}(|G(2\pi \cdot j \cdot f_c)|) = -23.01 \times 10^0$ Dämpfung bei Grenzfrequenz

$\Omega_{TP} := \frac{1}{\omega_c \sqrt{R_2 \cdot R_4 \cdot C_3 \cdot C_5}}$ $\Omega_{TP} = 1000 \times 10^{-3}$ Normierte Polfrequenz

$Q_{TP} := \frac{\sqrt{R_2 \cdot R_4 \cdot C_3 \cdot C_5}}{R_4 \cdot C_5 \cdot (1 - A_0) + R_2 \cdot C_3}$ $Q_{TP} = 707.107 \times 10^{-3}$ Polgüte

Hochpass

Das Hochpassglied 2. Ordnung erhält man mit $Y_1 = \frac{1}{R_1}, Y_2 = \frac{1}{R_2}, Y_3 = sC_3, Y_4 = \frac{1}{R_4}, Y_5 = sC_5$.

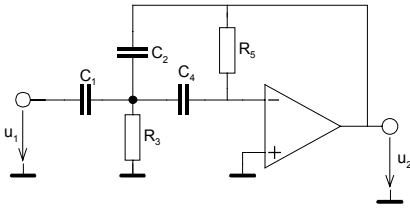


Bild 2-56: Hochpass 2. Ordnung mit Mehrfach-Gegenkopplung.

$$G(s) = \frac{-R_3 R_5 C_1 C_4 s^2}{R_3 R_5 C_2 C_4 s^2 + (R_3 (C_1 + C_2 + C_4))s + 1} = \frac{A_\infty R_3 R_5 C_2 C_4 s^2}{R_3 R_5 C_2 C_4 s^2 + (R_3 C_2 (1 - A_\infty) + R_3 C_4)s + 1} \quad (2-56)$$

$$A_\infty = -\frac{C_1}{C_2}$$

Die Dimensionierungsgleichungen werden daraus mit Koeffizientenvergleich:

$$R_3 = \frac{1}{\omega_p Q_p (C_2 (1 - A_\infty) + C_4)} \quad C_1 = -A_\infty C_2 \quad \omega_p = \omega_c \Omega_p \quad (2-57)$$

$$R_5 = \frac{Q_p (C_2 (1 - A_\infty) + C_4)}{C_2 C_4 \omega_p}$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{R_3 R_5 C_2 C_4}}{R_3 C_2 (1 - A_\infty) + R_3 C_4} = \frac{\sqrt{R_3 R_5 C_2 C_4}}{R_3 (C_1 + C_2 + C_4)}$$

$$f_p = \frac{1}{2\pi \sqrt{R_3 R_5 C_2 C_4}}$$

Ein Nachteil dieser Schaltung ist die schlechte Einstellbarkeit der Endverstärkung über das Kapazitätsverhältnis C_2/C_1 . Für $C_1=C_2=C_4$ wird die Endverstärkung $A_\infty=1$ und der Formelsatz vereinfacht sich nochmals etwas.

Beispiel 2-24: MGK Hochpass 2. Ordnung mit $A_0=+6\text{dB}$

Man realisiere eine Butterworth-Hochpass mit einer Endverstärkung von $A_\infty=+6\text{dB}$, Grenzfrequenz $f_c=700\text{Hz}$. Der Kondensator C_2 soll 10nF , C_4 soll 22nF betragen.

Lösung:

Vorgaben:

$$Q_p := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Omega_p := 1.00 \quad (\text{Aus Tabelle gelesen für Butterworth-TP})$$

$$f_c := 700\text{Hz} \quad C_2 := 10\text{nF} \quad A_{\text{INFdB}} := 6 \quad \text{Enddämpfung (Verstärkung)}$$

$$C_4 := 22\text{nF}$$

Dimensionierungsformeln MGK 2.Ordnung bei gegebenen Kondensatorwerten C2,C4::

Berechnungen:

$$A_{\text{INF}} := -10^{0.05 \cdot A_{\text{INFdB}}} \quad A_{\text{INF}} = -1.995 \times 10^0$$

$$\omega_c := 2 \cdot \pi \cdot f_c$$

$$\Omega_p := \frac{1}{\Omega_p} \quad \text{TP-HP Transformation}$$

$$C_1 := \frac{C_2}{-A_{\text{INF}}}$$

$$R_3 := \frac{1}{\omega_c \cdot \Omega_p \cdot Q_p \cdot [C_2 \cdot (1 - A_{\text{INF}}) + C_4]} \quad R_3 = 6.189 \times 10^3 \Omega$$

$$R_5 := \frac{Q_p \cdot [C_2 \cdot (1 - A_{\text{INF}}) + C_4]}{\omega_c \cdot \Omega_p \cdot C_2 \cdot C_4} \quad R_5 = 37.966 \times 10^3 \Omega$$

Resultate:

$$C_1 = 5.012 \times 10^{-9} \text{F} \quad C_2 = 10 \times 10^{-9} \text{F} \quad C_4 = 22 \times 10^{-9} \text{F}$$

$$R_3 = 6.189 \times 10^3 \Omega \quad R_5 = 37.966 \times 10^3 \Omega$$

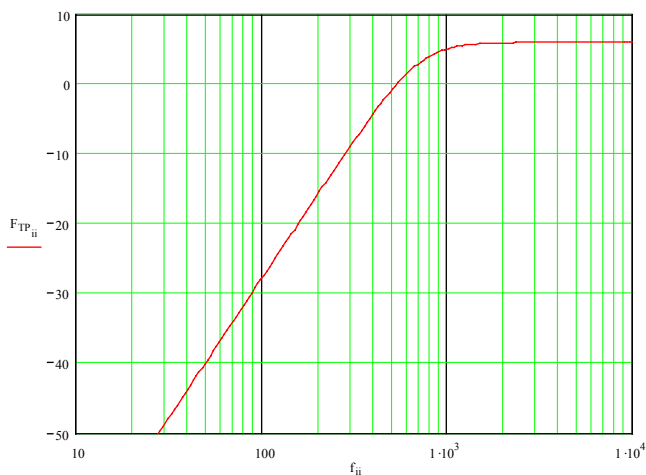
Grafik:

$$f := \text{logrange}(10, 10000, 200) \text{ Hz} \quad ii := 0.. \text{letzte}(f)$$

$$G(s) := \frac{A_{\text{INF}} \cdot R_3 \cdot R_5 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot s^2}{R_3 \cdot R_5 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot s^2 + [R_3 \cdot C_4 + R_5 \cdot C_2 \cdot (1 - A_{\text{INF}})] \cdot s + 1} \quad \text{Übertragungsfunktion MGK-HP 2. Ordnung}$$

$$F_{\text{TP}_{ii}} := \text{dB}(|G(2\pi \cdot j \cdot f_{ii})|)$$

Amplitudengang Butterworth-HP 2. Ordnung



Kontrollwerte:

$$\text{dB}(|G(2\pi \cdot j \cdot 10^7 \text{Hz})|) = 6 \times 10^0 \quad \text{Enddämpfung}$$

$$\text{dB}(|G(2\pi \cdot j \cdot f_c)|) = 2.99 \times 10^0 \quad \text{Dämpfung bei Grenzfrequenz}$$

$$\Omega_{\text{HP}} := \frac{1}{\omega_c \sqrt{R_3 \cdot R_5 \cdot C_2 \cdot C_4}} \quad \Omega_{\text{HP}} = 1 \times 10^0 \quad \text{Normierte Polfrequenz HP}$$

$$Q_{\text{HP}} := \frac{\sqrt{R_3 \cdot R_5 \cdot C_2 \cdot C_4}}{R_3 \cdot C_2 \cdot (1 - A_{\text{INF}}) + R_5 \cdot C_4} \quad Q_{\text{HP}} = 707.107 \times 10^{-3} \quad \text{Polgüte}$$

Bandpass

Man erhält ein Bandpassglied, wenn $Y_1 = \frac{1}{R_1}, Y_2 = sC_2, Y_3 = \frac{1}{R_3}, Y_4 = sC_4, Y_5 = \frac{1}{R_5}$.

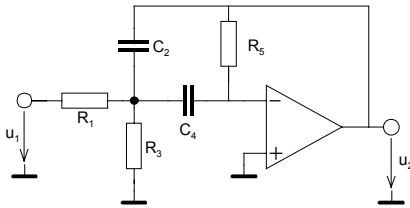


Bild 2-57: Bandpass 2. Ordnung mit Mehrfach-Gegenkopplung.

Man findet durch Einsetzen in die allgemeine Übertragungsfunktion des MGK-Gliedes und etwas Umformen:

$$G(s) = \frac{\frac{-R_3 R_5}{R_1 + R_3} C_4 s}{1 + s \left(\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} (C_2 + C_4) \right) + \frac{R_1 R_3 R_5}{R_1 + R_3} C_2 C_4 s^2} \quad (2-58)$$

Der Koeffizientenvergleich mit der entnormierten Bandpass Übertragungsfunktion ergibt das Gleichungssystem:

$$\frac{A_M \frac{1}{Q_{PB} \omega_{PB}} s}{1 + \frac{1}{Q_{PB} \omega_{PB}} s + \frac{1}{\omega_{PB}^2} s^2} = \frac{\frac{-R_3 R_5}{R_1 + R_3} C_4 s}{1 + s \left(\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} (C_2 + C_4) \right) + \frac{R_1 R_3 R_5}{R_1 + R_3} C_2 C_4 s^2} \quad (2-59)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} A_M \frac{1}{Q_{PB} \omega_{PB}} &= \frac{-R_3 R_5}{R_1 + R_3} C_4 \\ \frac{1}{Q_{PB} \omega_{PB}} &= \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} (C_2 + C_4) \\ \frac{1}{\omega_{PB}^2} &= \frac{R_1 R_3 R_5}{R_1 + R_3} C_2 C_4 \end{aligned}$$

Die Auflösung erfolgt nach den Widerständen R_1 , R_3 und R_5 , bei gegebenen Kondensatorwerten C_2 , C_4 sowie die Polgüte und Polfrequenz und Verstärkung bei Bandmittenfrequenz A_M . Die Resultate werden:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{-Q_{PB}}{\omega_{PB} A_M C_2} & R_3 &= \frac{Q_{PB}}{\omega_{PB} (Q_{PB}^2 (C_2 + C_4) + C_2 A_M)} \\ R_5 &= \frac{Q_{PB} (C_2 + C_4)}{\omega_{PB} C_2 C_4} \end{aligned} \quad (2-60)$$

A_M wird durch den Stufenkorrekturfaktor A_K bestimmt (siehe auch (2-32)). Wird keine zusätzliche Verstärkung/Dämpfung gefordert wird $A_M = A_K$. Bei zusätzlich gewünschter Verstärkung/Dämpfung wird diese zweckmässigerweise über alle Stufen gleichmässig verteilt (n-te Wurzel) und an Stufenkorrekturfaktor anmultipliziert (vgl. auch Beispiel 2-25).

Beispiel 2-25: Tschebyscheff Bandpass 6. Ordnung

Man realisiere einen Tschebyscheff-Bandpass mit MGK-Teilfiltern der folgende Sperranforderung erfüllt:

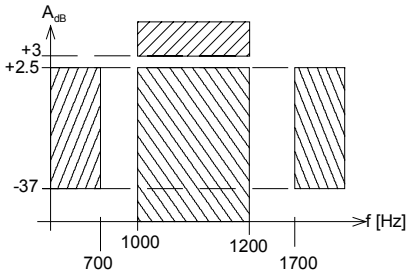


Bild 2-58: Dämpfungsschablone für Dimensionierung in Beispiel 2-25.

Lösung:

Vorgaben:

$f_{C1} := 100\text{Hz}$ $f_{C2} := 1200\text{Hz}$ $A_{rdB} := 0.5$ $A_{mdB} := 3$
 $f_{H1} := 700\text{Hz}$ $f_{H2} := 1700\text{Hz}$ $A_{HdB} := 40$

Berechnungen:

$f_M := \sqrt{f_{C1} \cdot f_{C2}}$ $f_M = 1.09545 \times 10^3 \text{ Hz}$
 $\Omega_{C1} := \frac{f_{C1}}{f_M}$ $\Omega_{C1} = 0.91287$
 $\Omega_{C2} := \frac{f_{C2}}{f_M}$ $\Omega_{C2} = 1.09545$
 $\Omega_{H2} := \frac{f_{H2}}{f_M}$ $\Omega_{H2} = 1.55188$
 $\Omega_{H1} := \frac{f_{H1}}{f_M}$ $\Omega_{H1} = 0.63901$

BP-TP Transformation für Bestimmung Referenziefpass:

$D := \frac{1}{\Omega_{C2} - \Omega_{C1}}$ $D = 5.47723$
 $\Omega_{CTP} := D \cdot \left(\frac{1}{\Omega_{C1}} - \Omega_{C1} \right)$ $\Omega_{CTP} = 1$
 $\Omega_{HTP1} := D \cdot \left(\frac{1}{\Omega_{H1}} - \Omega_{H1} \right)$ $\Omega_{HTP1} = 5.07143$
 $\Omega_{HTP2} := D \cdot \left(\frac{1}{\Omega_{H2}} - \Omega_{H2} \right)$ $\Omega_{HTP2} = 4.97059$
 $\Omega_{HTP} := \text{wenn}(\Omega_{HTP1} < \Omega_{HTP2}, \Omega_{HTP1}, \Omega_{HTP2})$ $\Omega_{HTP} = 4.97059$ Die härtere Sperrforderung gilt!

Min. Ordnung Referenziefpass:

$\epsilon := \sqrt{10^{0.1 \cdot A_{rdB}} - 1}$ $\epsilon = 0.34931$
 $n := \frac{\text{arccosh} \left(\frac{10^{0.1 \cdot A_{HdB}} - 1}{\epsilon^2} \right)}{\text{arccosh}(\Omega_{HTP})}$ $n = 2.7773$
 $m := 0..n - 1$ $n := \text{ceil}(n)$ $n = 3$

Bestimmung Tschebyscheff-Pole der Ordnung n:

$S_{PT_m} := -\sin \left(\frac{1 + 2 \cdot m \cdot \pi}{2 \cdot n} \right) \cdot \sinh \left(\frac{1}{n} \cdot \text{arsinh} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right) + j \cdot \cos \left(\frac{1 + 2 \cdot m \cdot \pi}{2 \cdot n} \right) \cdot \cosh \left(\frac{1}{n} \cdot \text{arsinh} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right)$
 $\Omega_{PT_m} := |S_{PT_m}|$ Normierte Polfrequenz Referenziefpass $\Omega_{PT} = \begin{pmatrix} 1.06885 \\ 0.62646 \\ 1.06885 \end{pmatrix}$
 $S_{PT} = \begin{pmatrix} -0.31323 + 1.02193i \\ -0.62646 \\ -0.31323 - 1.02193i \end{pmatrix}$ Normierte Pole Tschebyscheff Referenziefpass

Tiefpass-Bandpass Transformation

$S_{PB_{2m}} := \frac{S_{PT_m}}{2D} + \frac{\sqrt{(S_{PT_m})^2 - 4D^2}}{2D}$ Konjugiert komplexe normierte Bandpass Pole
 $S_{PB_{2m+1}} := \frac{S_{PT_m}}{2D} - \frac{\sqrt{(S_{PT_m})^2 - 4D^2}}{2D}$ Bandpass Polgüten Normierte Bandpass Polfrequenzen
 $k := 0..n - 1$
 $\Omega_{PB_k} := |S_{PB_k}|$ $Q_{PB_k} := \frac{-\Omega_{PB_k}}{2 \cdot \text{Re}(S_{PB_k})}$ $Q_{PB} = \begin{pmatrix} 17.56236 \\ 17.56236 \\ 8.74319 \end{pmatrix}$ $\Omega_{PB} = \begin{pmatrix} 0.91102 \\ 1.09767 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $S_{PB} = \begin{pmatrix} -0.02594 - 0.91065i \\ -0.03125 + 1.09723i \\ -0.05719 - 0.99836i \\ -0.05719 + 0.99836i \\ -0.02594 + 0.91065i \\ -0.03125 - 1.09723i \end{pmatrix}$ Normierte Pollagen von Tschebyscheff Bandpass der Ordnung 2n.

Stufenverstärkungskorrekturfaktor:

$A_K := \frac{1}{D} \cdot \Omega_{PT_k} \cdot Q_{PB_k}$ $A_K = \begin{pmatrix} 3.42721 \\ 2.00869 \\ 1.70619 \end{pmatrix}$ Stufenverstärkungskorrekturfaktor für jedes Bandpass Teilfilter

Elementwerte der Teilfilter mit MGK Bandpass. C2, C4 sind vorgegeben.
 (Alle drei Teilfilter werden simultan berechnet und erscheinen in den Vektoren,
 wobei jeweils die Elemente der gleichen Zeile zusammen gehören.)

$$C_{2k} := 10nF \quad C_{4k} := 10nF \quad (\text{Für alle Stufen}) \quad \omega_M := 2\pi \cdot f_M$$

$$A_M := -A_K \cdot \sqrt[0.05 \cdot A_{\text{mindB}}]{10} \quad (\text{Zus. Verstärkung/Dämpfung einbringen}) \quad \omega_M = 6.88288 \times 10^3 \text{ Hz}$$

$$R_{1k} := \frac{-Q_{PBk}}{\omega_M \cdot \Omega_{PBk} \cdot A_M \cdot C_{2k}} \quad R_1 = \begin{pmatrix} 7.28357 \times 10^4 \\ 1.0314 \times 10^5 \quad \Omega \\ 6.63547 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad A_M = \begin{pmatrix} -3.84539 \\ -2.25379 \\ -1.91438 \end{pmatrix}$$

$$R_{3k} := \frac{Q_{PBk}}{\omega_M \cdot \Omega_{PBk} \cdot [(Q_{PBk})^2 \cdot (C_{2k} + C_{4k}) + C_{2k} \cdot A_M]} \quad R_3 = \begin{pmatrix} 456.88303 \\ 378.21058 \quad \Omega \\ 841.39934 \end{pmatrix}$$

$$R_{5k} := \frac{Q_{PBk} \cdot (C_{2k} + C_{4k})}{\omega_M \cdot \Omega_{PBk} \cdot C_{2k} \cdot C_{4k}} \quad R_5 = \begin{pmatrix} 5.60164 \times 10^5 \\ 4.64911 \times 10^5 \quad \Omega \\ 2.54056 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

Grafik:

$$G(s, R_1, C_2, R_3, C_4, R_5) := \frac{-R_3 \cdot R_5 \cdot C_4 \cdot s}{R_1 + R_3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}\right) \cdot (C_2 + C_4) \cdot s + \frac{R_1 \cdot R_3 \cdot R_5}{R_1 + R_3} \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot s^2}$$

Übertragungsfunktion MGK Bandpass
 2. Ordnung

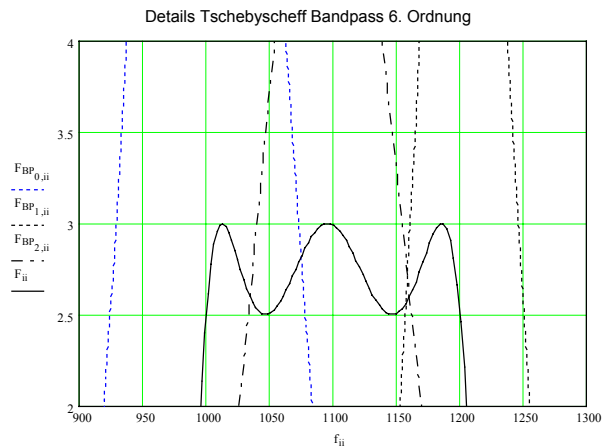
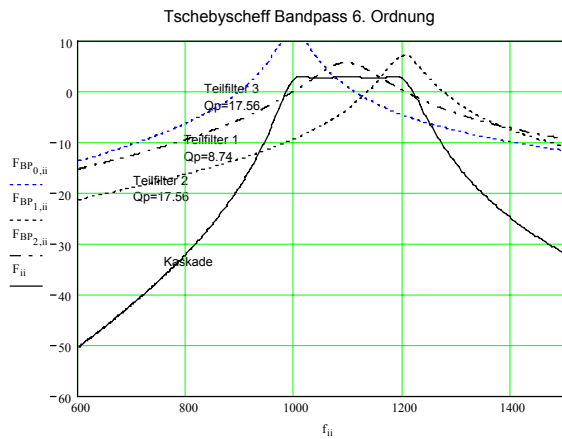
f := logrange(600, 1500, 400) Hz

ii := 0..letzte(f)

F_{BP, k, ii} := dB(|G(2πf_{ii}, j, R_{1k}, C_{2k}, R_{3k}, C_{4k}, R_{5k})|) **Amplitudengang Teilfilter**

Indizes: 0 = Teilfilter 3 (wegen Qp = max)
 1 = Teilfilter 2 (wegen Qp = max)
 2 = Teilfilter 1 (wegen Qp = min)

F_{ii} := ∑_k F_{BP, k, ii} **Amplitudengang Kaskade**



Tschebyscheff Bandpass 6. Ordnung nach Beispiel 2-23

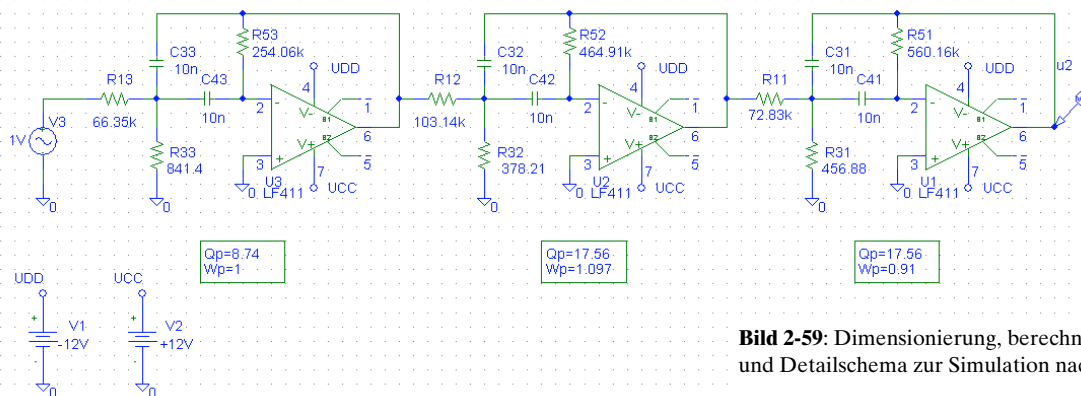


Bild 2-59: Dimensionierung, berechneter Amplitudengang und Detailschema zur Simulation nach Beispiel 2-25.

2.13 Switched Capacitor Filter (SC-Filter)

Die Theorie der SC-Filter wurde in den 60er Jahren entwickelt und durch die Firma MOS-Technologies erstmals in integrierter Schaltungstechnik auf den Markt gebracht.

Bei Switched Capacitor Filter werden die frequenzbestimmenden Widerstände durch geschaltete Kondensatoren ersetzt:

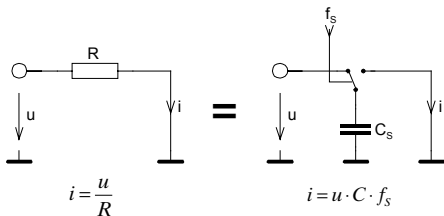


Bild 2-60: Ersatz von frequenzbestimmenden Widerständen durch geschaltete Kapazitäten in SC-Filter.

Durch Verändern der Schaltfrequenz kann die Grenzfrequenz des Filters variiert werden. Daher sind SC-Filter sehr flexibel, weisen aber einige Nachteile gegenüber konventionellen analogen Filtern auf.

SC-Filter sind wertekontinuierliche, zeitdiskrete Systeme. Gegenüber einem echten digitalen Filter wird keine AD/DA Wandlung benötigt, daher existiert kein Quantisierungsfehler. Trotzdem gilt wegen der Abtastung die Frequenzbeschränkung durch das Abtasttheorem ($f < f_s/2$) und Dynamikbereich ist signifikant kleiner als beim analogen Filter.

SC-Filter werden von zahlreichen Herstellern direkt als IC gefertigt mit verschiedenen Charakteristiken. Sie ermöglichen eine einfache und kostengünstige Realisation vieler Filterbedürfnisse. Die Hersteller vereinfachen den an sich aufwändigen Entwurf, indem sie meist kostenlos Programme zur Dimensionierung für die jeweiligen Bausteine bereit stellen. Eine konventionelle Realisation mit elektronischen Schaltern und OpAmps ist möglich, aber nicht sinnvoll.

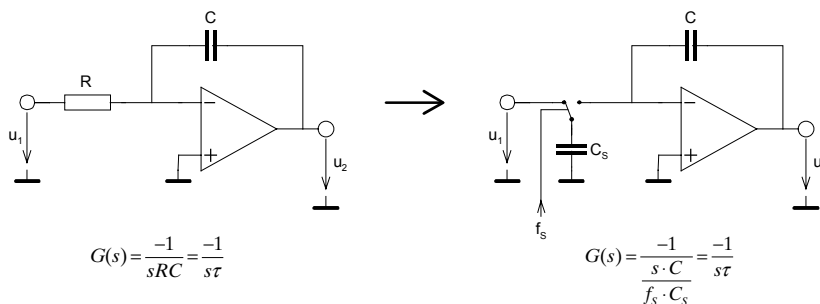
2.13.1 Arbeitsweise

Alle frequenzbestimmenden Widerstände werden durch geschaltete Kapazitäten ersetzt. Der äquivalente Widerstand R_{eq} den die geschaltete Kapazität C_s darstellt ist nach Bild 2-60:

$$i = \frac{u}{R_{eq}} = u \cdot C_s \cdot f_s \quad \rightarrow \quad R_{eq} = \frac{1}{C_s \cdot f_s} \quad (2-61)$$

Der äquivalente Leitwert ist linear von der Schaltfrequenz abhängig. Diese Eigenschaft wird bei den SC-Filtern direkt ausgenutzt.

Beim invertierenden Integrator oder Tiefpass erster Ordnung wird der Widerstand R durch die geschaltete Kapazität ersetzt:



(2-62)

Bild 2-61: Invertierender Tiefpass 1. Ordnung, realisiert in RC und SC Technik.

Dabei gilt:

$$\tau = RC = R_{eq}C = \frac{C}{C_s f_s} = \frac{\eta}{2\pi f_s} \quad (2-63)$$

Bei IC-Filtern ist das Kapazitätsverhältnis $\frac{C}{C_s} = \frac{\eta}{2\pi}$ durch den Hersteller fest vorgegeben und liegt in der Größenordnung von 50..200. Ein kleineres Verhältnis ist für die Herstellung günstiger, da weniger Chipfläche benötigt wird.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass ein nichtinvertierender Tiefpass oder Integrator durch einfaches Vertauschen der Kondensatoranschlüsse beim Umladen realisiert werden kann. Das Vertauschen der Anschlüsse und damit die Vorzeichenänderung wird mit einem zweiten Umschalter vorgenommen:

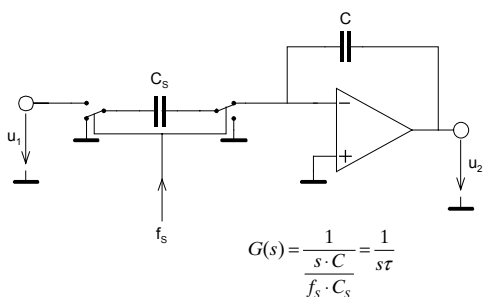


Bild 2-62: Nichtinvertierender Tiefpass (Integrator) durch Einsatz zweier Umschalter. Die Inversion erfolgt beim Umladen indem der Kondensator umgepolt wird.

(2-64)

Aufgrund der unvermeidlichen parasitären Widerstände erfolgt das Auf- und Umladen nicht schlagartig sondern exponentiell. Dies ist an sich auch wünschenswert, da weder die Eingangsspannungsquelle noch der Operationsverstärker die hohen Ströme liefern könnten. Die parasitären Widerstände und Kapazitäten bestimmen auch die maximale Schaltfrequenz, bei der noch eine vollständige Umladung gewährleistet ist.

Die Analyse des Übertragungsverhalten erfolgt zweckmässigerweise durch Beschreibung des Umladevorganges pro Zeiteinheit. Dem interessierten Leser sei hierzu z.B. auf [ELL94] verwiesen.

Filter 2. Ordnung werden bei SC-Filter wegen der Flexibilität häufig als State-Variable-Filter ausgeführt. Die State-Variable-Schaltung ermöglicht gleichzeitig ein TP, HP und BP Übertragungsverhalten.

Widerstandsäquivalente

Bei SC-Filter können die frequenzbestimmenden Widerstände durch verschiedenartig geschaltete Kondensatoren erzeugt werden. Sie unterscheiden sich in der Möglichkeit der Vorzeichenumkehr während der Lade-Umladevorgänge und der Anordnung des Kondensators.

Da die Umschalter zur Umladung intern mit einfachen Schaltern realisiert werden, sind nachfolgend vier häufig verwendete Äquivalente aufgezeigt. Die Ansteuerung erfolgt mit zwei 180° phasenverschobenen, nicht überlappenden Takten Φ_1, Φ_2 .

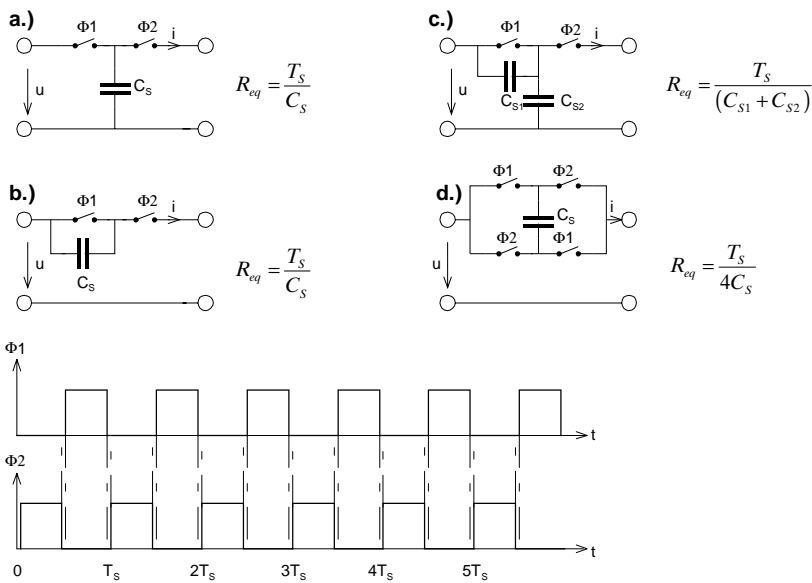


Bild 2-63: Widerstandsäquivalente für SC-Filter. Die Ansteuerung der Schalter erfolgt mit zwei phasenverschobenen, nicht überlappenden Takten Φ_1 und Φ_2 .

Quelle: [ELL94]

2.13.2 Z-Transformation

Zur Analyse eines abgetasteten Systems wird die frequenzdiskrete Übertragungsfunktion $G(z)$ benötigt. (Es wäre falsch in abgetasteten Systemen mit $G(s)$ zu arbeiten.) Zweck der z-Transformation ist es, aus einer frequenzkontinuierlichen Übertragungsfunktion $G(s)$ eine frequenzdiskrete Übertragungsfunktion $G(z)$ herzuleiten.

Es existieren mehrere Methoden um diese Transformation durchzuführen. Sie unterscheiden sich im Rechenaufwand und in der Güte der Näherung. Es ist anzumerken, dass die analogen und digitalen Grenzfrequenzen exakt transformiert werden können, aber die restlichen Frequenzen eine Verzerrung erfahren.

Ziel der Ausführungen ist, Transformationsvorschriften aufzuzeigen damit aus bekannten analogen Filtern das zugehörige abgetastete System berechnet werden kann. Eine weitergehende Betrachtung erfolgt im Kapitel der digitalen Filter.

Wir zeigen daher rezeptartig die Bilineare Z-Transformation ohne näher auf die komplexen Zusammenhänge einzugehen.

Geometrische Interpretation

Grundsätzlich bewirkt die z-Transformation eine Abbildung sämtlicher Punkte in der linken s-Halbebene in den Einheitskreis der z-Ebene. Die $j\omega$ -Achse wird auf den Kreis abgebildet. Der Ursprung der s-Ebene im Speziellen wird auf +1 transformiert. Alle Punkte der rechten s-Halbebene werden ausserhalb des Einheitskreises abgebildet

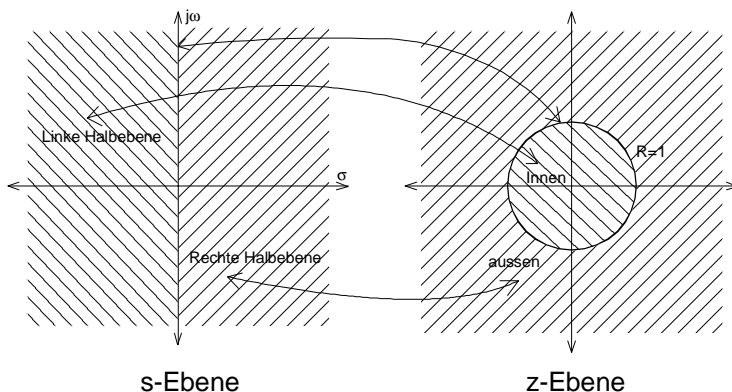


Bild 2-64: Vergleich der s- und z-Ebene bei der Z-Transformation

Zur Stabilitätsbetrachtung im digitalen System gelten dieselben Regeln wie bei der kontinuierlichen Übertragungsfunktion, jedoch im übertragenen Sinne (z.B. Pole innerhalb des Einheitskreises).

Bilineare Z-Transformation

Die Bilineare Z-Transformation erlaubt die Umrechnung von frequenzkontinuierlichen Werten in frequenzdiskrete Werte, wie sie in abgetasteten Systemen entstehen.

Zur Transformation definiert man die diskrete Bildvariable

$$z = e^{sT_s} \quad T_s : \text{Abtastperiodendauer} = \frac{1}{f_s} \quad (2-65)$$

und die Transformationsvorschrift:

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad z = \frac{\frac{2}{T_s} + s}{\frac{2}{T_s} - s} \quad (2-66)$$

Die Transformation überführt alle analogen Frequenzen $[0, \infty)$ in den Bereich der digitalen Frequenzen $[0, \pi)$. Während die Transformation für tiefe Frequenzen praktisch linear erfolgt, wird der höhere Frequenzbereich verzerrt. Diese Verzerrung muss beim Filterentwurf und Transformation berücksichtigt werden (sog. prewarping). Die Verzerrung ist vor allem bei höheren Frequenzen signifikant.

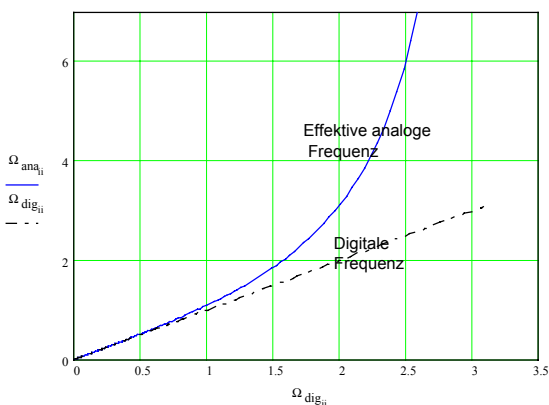


Bild 2-65: Verzerrte Abbildung der Frequenzen bei der z-Transformation. Dies fällt vor allem bei höheren Frequenzen ins Gewicht..

Die Umsetzung der diskreten zu analogen Frequenzen folgt den Gleichungen:

$$\omega_{ana} = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\Omega_{dig}}{2}\right) = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_{dig} \cdot T_s}{2}\right) = \frac{2}{T_s} \tan(\pi \cdot f_{dig} \cdot T_s) \quad \Omega_{dig} = \frac{2\pi f_{dig}}{f_s} \quad (2-67)$$

$$\omega_{dig} = \frac{2}{T_s} \operatorname{atan}\left(\frac{\omega_{ana} \cdot T_s}{2}\right) = \frac{2}{T_s} \operatorname{atan}(\pi \cdot f_{ana} \cdot T_s)$$

Beispiel 2-26: Z-Transformation eines Tiefpass 1.Ordnung

Ein analoger Tiefpass 1.Ordnung mit einer Grenzfrequenz $f_c=1\text{kHz}$ soll als abgetastetes System mit $f_s=9.6\text{kHz}$ dargestellt werden. Man bestimme $G(z)$ und verifiziere den resultierenden Amplitudengang mit dem Amplitudengang des analogen Tiefpass.

Lösung:

Der analoge Tiefpass wird:

$$G(s) = \frac{1}{1+s\tau} = \frac{1}{1+\frac{s}{6283.185}} = \frac{6283.185}{s+6283.185} \quad (\text{analog})$$

Um im digitalen System bei 1kHz die Dämpfung von 3.01dB zu erreichen, muss die Verzerrung kompensiert werden (prewarping). Das heisst, das Filter muss für eine etwas höhere Frequenz dimensioniert werden:

$$\Omega_c = \frac{2\pi f_c}{f_s} = \frac{2\pi 1000}{9600} = 0.6549 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad f_s = 9.6\text{kHz}$$

$$\omega_{Cana} = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_{Cdig} \cdot T_s}{2}\right) = 6517.52 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$G(s) = \frac{6517.52}{s+6517.52} \quad (\text{analog,prewarped})$$

Die z-Transformation erfolgt durch Anwenden der Transformationsvorschrift indem für $s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$

eingesetzt wird und anschliessend soweit umgeformt bis wieder eine rationale Funktion mit einem linearen Zähler- und Nennerglied mit Potenzen von z^{-1} vorliegt. T_s wird als Zahlenwert direkt eingesetzt:

$$G(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{6517.52}{\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} + 6517.52} = \frac{0.2534(z+1)}{z-0.49314} = \frac{0.2534 + 0.2534z^{-1}}{1 - 0.49314z^{-1}}$$

Die Auswertung des Amplitudenganges der digitalen Übertragungsfunktion erfolgt indem für z die Definition $z = e^{sT_s}$ eingesetzt wird. Für das eingeschwungene System wird $s = j\omega$ verwendet und man erhält:

$$f_S := 9.6\text{kHz} \quad T_S := \frac{1}{f_S} \quad f_C := 1\text{kHz}$$

$$f := \text{logrange}(10, 10000, 500) \text{ Hz} \quad ii := 0.. \text{letzte}(f)$$

Diskret	Kontinuierlich	
$G_{\text{dig}}(z) := \frac{0.2534 + 0.2534z^{-1}}{1 - 0.49315z^{-1}}$	$G_{\text{ana}}(s) := \frac{6283.18\text{Hz}}{s + 6283.18\text{Hz}}$	Übertragungsfunktionen
$F_{\text{dig},ii} := \text{dB}\left(\left G_{\text{dig}}\left(e^{j \cdot 2\pi \cdot f_{ii} \cdot T_S}\right)\right \right)$	$F_{\text{ana},ii} := \text{dB}\left(\left G_{\text{ana}}\left(j \cdot 2\pi \cdot f_{ii}\right)\right \right)$	Amplitudengänge
$\text{dB}\left(\left G_{\text{dig}}\left(e^{j \cdot 2\pi \cdot f_C \cdot T_S}\right)\right \right) = -3.011$	$\text{dB}\left(\left G_{\text{ana}}\left(j \cdot 2\pi \cdot f_C\right)\right \right) = -3.01$	Kontrollwerte der Dämpfung bei Grenzfrequenz

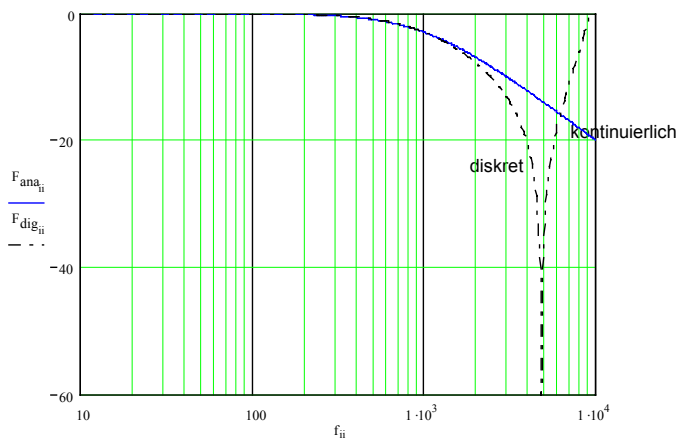


Bild 2-66: Berechnung und Vergleich des Amplitudengang des Tiefpassfilter 1. Ordnung nach Beispiel 2-26 in SC- und RC-Technik.

Im Durchlassbereich sind beide Lösungen praktisch identisch. Grosse Abweichungen zeigen sich aber im Sperrbereich. Bei $f_S/2$ wird eine maximale Sperrdämpfung erreicht. Die ist einleuchtend, da durch die Transformation die asymptotische Sperrdämpfung des analogen Filters bei f_∞ auf $f_S/2$ abgebildet wird.

Da alle abgetasteten Systeme eine spektrale Symmetrie zur halben Abtastfrequenz zeigen, erscheint auch hier der Amplitudengang an $f_S/2$ gespiegelt. Dies wiederholt sich periodisch alle f_S . Einsetzbar ist das Filter aber nur bis $\max. f_S/2$. Die analogen Frequenzen über $f_S/2$ sind in abgetasteten Systemen sowieso Alias-Frequenzen und sind grundsätzlich nicht erwünscht.

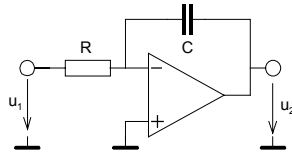
2.13.3 Entwurfsprozess für SC-Filter

Bei IC-Filtern ist grundsätzlich nach Herstellervorschrift vorzugehen. Meist sind hierzu Formeln und Grafiken in den Datenbüchern aufgeführt. Oft werden auch kostenlose Entwurfs- und Simulationsprogramme durch die Hersteller bereit gestellt. Sie funktionieren, d.h. unterstützen, aber meist nur für die herstellereigenen Bausteine.

[ELL94] empfiehlt mit den nachfolgenden Ausführungen, wie allgemein aus einem analogen aktiven Filter eine Lösung in SC-Technik abgeleitet werden kann:

1. Die Grenz- und Sperrfrequenzen des SC-Filters müssen für den analogen Prototyp korrigiert werden (prewarped) gemäss (2-67). Die Anforderung ist die digitale Frequenz, man erhält die zugehörige analoge (prewarped-) Frequenz.

- Das analoge Filter wird entwickelt auf der Grundlage der prewarp-Frequenzen.
- Jeder Widerstand der aktiven Schaltung wird durch eine geschaltete Kapazität gemäss Bild 2-63d.) ersetzt.



$$C_s = \frac{T_s}{2R}$$

$$G(s) = \frac{-1}{sRC}$$

(2-68)

Bild 2-67: Der analoge Prototyp bildet die Grundlage für den Entwurf des SC-Filters

- Weil die Schalter zweimal alle T_S Sekunden schalten, ist für $T_s' = T_S/2$ einzusetzen: Der Kondensator wird damit:

$$C_s = \frac{T_s}{4R}$$

(2-69)

- Ein Abtast-Halteglied (Sample-Hold) mit der doppelten Abtastfrequenz ($1/T_S$) ist am Eingang einzufügen.

Beispiel 2-27: SC-Filter Entwurf Tiefpass 2. Ordnung

Man realisiere ein Butterworth-TP 2. Ordnung mit Mehrfach-Gegenkopplung nach Bild 2-55 für eine Grenzfrequenz $f_c = 1\text{kHz}$. Der Entwurf soll für eine Sample-Frequenz von 50kHz erfolgen.

Lösung:

Die Prewarp-Grenzfrequenz wird:

Vorgaben:

$f_S := 50\text{kHz}$ Samplefrequenz $f_C := 1\text{kHz}$ Grenzfrequenz
 $n := 2$ Filterordnung

Prewarp-Grenzfrequenz:

$$T_S := \frac{1}{f_S} \qquad T_S = 2 \times 10^{-5} \text{ s}$$

$$\Omega_{\text{dig}} := \frac{2\pi \cdot f_C}{f_S} \qquad \Omega_{\text{dig}} = 0.126$$

$$\omega_{\text{ana}} := \frac{2}{T_S} \tan\left(\frac{\Omega_{\text{dig}}}{2}\right) \qquad \omega_{\text{ana}} = 6.291 \times 10^3 \text{ Hz}$$

Der analoge Prototyp wird mit $A_0 = -1$ mit dem Formelsatz (2-55) dimensioniert:

Normierte Butterworth-Tiefpass Pole der Ordnung n :

$$k := 0..n - 1$$

$$s_{PT_k} := -\sin\left(\frac{1+2\cdot k}{2\cdot n}\cdot\pi\right) + j\cdot\cos\left(\frac{1+2\cdot k}{2\cdot n}\cdot\pi\right)$$

$$m := 0, 1.. \text{trunc}\left(\frac{n-1}{2}\right) \quad \text{Indizes der Teilfilter} \quad s_{PT} = \begin{pmatrix} -0.707 + 0.707i \\ -0.707 - 0.707i \end{pmatrix}$$

Normierte Polfrequenzen und Polgüten:

$$\Omega_{P_m} := |s_{PT_m}| \quad Q_{P_m} := \frac{-\Omega_{P_m}}{2\text{Re}(s_{PT_m})} \quad \Omega_P = (1) \quad Q_P = (0.707)$$

Dimensionierungsformeln MGK 2.Ordnung bei gegebenen Kondensatorwerten C3, C5 und A0=1:

Vorgaben: $C_5 := 25\text{pF}$ Wahl
 $Q_P = 0.707107$ $\Omega_P = 1$ Normiert Butterworth Polfrequenz und -Güte
 $\omega_C = 6.291 \times 10^3 \text{ Hz}$ Prewarp-Grenzfrequenz

Berechnung analoger Prototyp:

$$C_{3\min} := 8Q_P^2 \cdot C_5 \quad C_{3\min} = 1 \times 10^{-10} \text{ F} \quad [F] \quad C_3 := C_{3\min} \quad (\text{Wahl})$$

$$R_{21} := \frac{1}{2 \cdot \omega_C \cdot \Omega_P \cdot Q_P} \cdot \frac{C_3 + \sqrt{C_3^2 - 4 \cdot Q_P^2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot 2}}{C_3 \cdot C_5} \quad R_{21} = 4.49566 \times 10^6 \Omega$$

$$R_{22} := \frac{1}{2 \cdot \omega_C \cdot \Omega_P \cdot Q_P} \cdot \frac{C_3 - \sqrt{C_3^2 - 4 \cdot Q_P^2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot 2}}{C_3 \cdot C_5} \quad R_{22} = 4.496 \times 10^6 \Omega$$

Wahl: $R_2 := R_{21}$

$$R_1 := R_2 \quad R_2 = 4.496 \times 10^6 \Omega$$

$$R_4 := \frac{1}{(\omega_C \cdot \Omega_P)^2 \cdot R_2 \cdot C_3 \cdot C_5} \quad R_4 = 2.248 \times 10^6 \Omega$$

$R_1 = 4.496 \times 10^6 \Omega$ Elementwerte des analogen Prototyps

$$C_3 = 1 \times 10^{-10} \text{ F}$$

$$C_5 = 2.5 \times 10^{-11} \text{ F}$$

Die Widerstände R_1, R_2, R_4 werden nun durch geschaltete Kapazitäten des Typs d.) nach Bild 2-63 ersetzt:

Geschaltete Kapazitäten bestimmen:

$$R1: \quad C_{S1} := \frac{T_S}{4R_1} \quad C_{S1} = 1.112 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$R2: \quad C_{S2} := \frac{T_S}{4R_2} \quad C_{S2} = 1.112 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$R4: \quad C_{S4} := \frac{T_S}{4R_4} \quad C_{S4} = 2.224 \times 10^{-12} \text{ F}$$

Das gesamte Filter wird nun wie im Bild 2-68 dargestellt, realisiert. Bei Fertigung in integrierter Schaltungstechnik würde man den kleinsten Kondensator der Schaltung so gross wählen wie die kleinstmögliche herstellbare Kapazität auf dem Chip. Alle anderen Kondensatoren würden dementsprechend skaliert.

Die gezeigte Lösung zeigt Empfindlichkeit für parasitäre Kapazitäten. Durch weitere Umformungen der Schaltung kann eine unempfindliche Variante gegenüber parasitären Kapazitäten gefunden werden (vgl auch [ELL94], S.215).

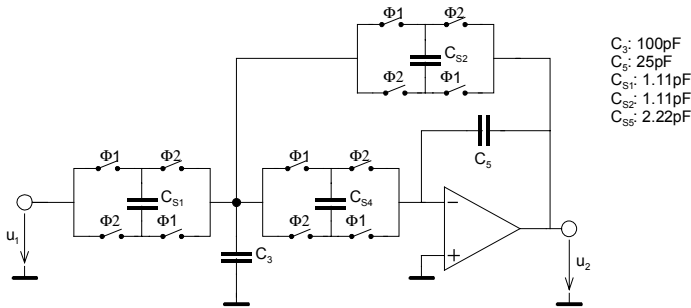


Bild 2-68: Detailschema des SC-Tiefpassfilters
2. Ordnung mit Mehrfach-Gegenkopplung
nach Beispiel 2-27.

Beispiel 2-28: Bestimmung $G(z)$ eines SC-Filters

Man bestimme die diskrete Übertragungsfunktion $G(z)$ des Tiefpass aus Beispiel 2-27 und bestimme den Amplitudengang für den nutzbaren Frequenzbereich.

Lösung:

In einem ersten Schritt wird die analoge Übertragungsfunktion $G(s)$ z-transformiert, indem man (2-66) in $G(s)$ anwendet:

$$G(z) = G(s) \Big|_{s = \frac{2z-1}{T_s z+1}} = \frac{\frac{-R_2}{R_1}}{1 + \left(\frac{R_2 R_4}{R_1} + R_2 + R_4 \right) C_5 \cdot s + R_2 R_4 C_3 C_5 s^2} \Big|_{s = \frac{2z-1}{T_s z+1}} = \frac{\frac{-R_2}{R_1}}{1 + \left(\frac{R_2 R_4}{R_1} + R_2 + R_4 \right) C_5 \cdot \frac{2z-1}{T_s z+1} + R_2 R_4 C_3 C_5 \left(\frac{2z-1}{T_s z+1} \right)^2}$$

Durch Anwenden von (2-69) werden die Widerstände durch die geschalteten Kapazitäten ersetzt:

$$G(z) = \frac{-4C_{S1}C_{S4}(z^2 + 2z + 1)}{(4C_{S4}C_{S2} + C_5(2C_{S4} + 2C_{S1} + C_3 + 2C_{S2}))z^2 + (8C_{S2}C_{S4} - 2C_3C_5)z + C_5(C_3 - 2C_{S1} - 2C_{S2} - 2C_{S4}) + 4C_{S2}C_{S4}}$$

$$= \frac{-4C_{S1}C_{S4}(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{4C_{S4}C_{S2} + C_5(2C_{S4} + 2C_{S1} + C_3 + 2C_{S2})z^{-1} + (C_5(C_3 - 2C_{S1} - 2C_{S2} - 2C_{S4}) + 4C_{S2}C_{S4})z^{-2}}$$

Der Amplitudengang wird durch Auswerten von $dB|G(z)|$ mit $z = e^{j\omega T_s}$ bestimmt. Der nutzbare Frequenzbereich geht bis $f_s/2$, wie man im Graphen sieht:

Grafik:

$T_S := 20\mu s$

$f_C = 1 \times 10^3 \text{ Hz}$

$f := \text{logrange}(10, 50000, 1000) \text{ Hz}$

$ii := 0.. \text{letzte}(f)$

$$G(z) := \frac{-4C_{S1} \cdot C_{S4} - 8C_{S1} \cdot C_{S4} z^{-1} - 4C_{S1} \cdot C_{S4} z^{-2}}{[4C_{S4} C_{S2} + C_5(2C_{S4} + 2C_{S1} + C_3 + 2C_{S2})] + (8C_{S2} C_{S4} - 2C_3 C_5) z^{-1} + [C_5(C_3 - 2C_{S1} - 2C_{S2} - 2C_{S4}) + 4C_{S2} C_{S4}] z^{-2}}$$

Frequenzdiskrete
 Übertragungsfunktion

$F_{ii} := \text{dB}\left(\left|G\left(e^{j 2\pi \cdot f_{ii} \cdot T_S}\right)\right|\right)$ Amplitudengang

$\text{dB}\left(\left|G\left(e^{j 2\pi \cdot f_C \cdot T_S}\right)\right|\right) = -3.01$ Kontrollwert der Dämpfung bei
 Grenzfrequenz

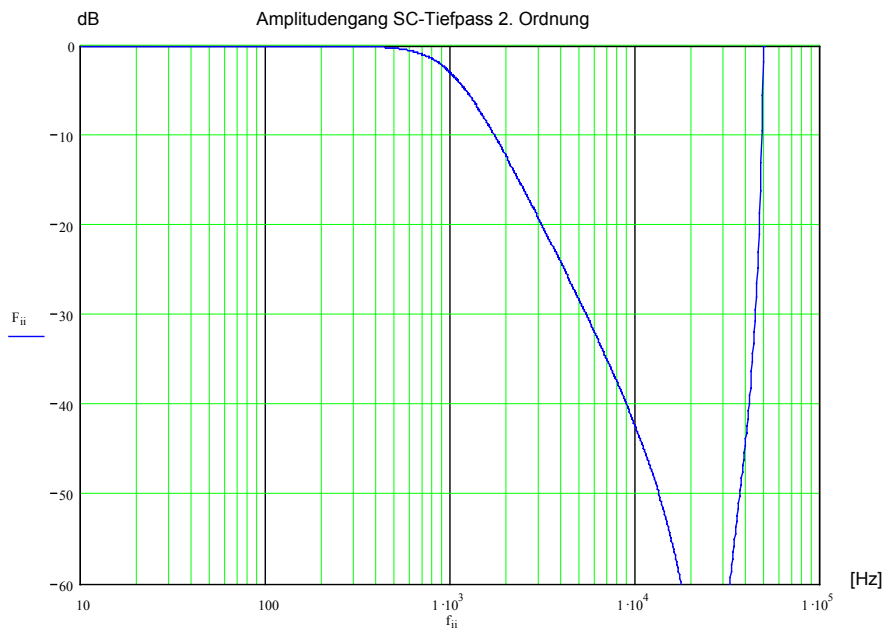


Bild 2-69: Berechneter Amplitudengang des SC-Tiefpassfilters 2. Ordnung mit Mehrfach-Gegenkopplung nach Beispiel 2-27.

3 AD-DA Wandler

Analoge Daten werden vielfach in digitaler Form benötigt wenn sie gespeichert, übertragen, verarbeitet oder angezeigt werden müssen. Sensoren und andere Datenquellen liefern meist ein analoges Signal.

Die nachfolgende digitale Bearbeitung bringt Vorteile in Flexibilität und Funktionalität, vor allem wenn umfangreiche Operationen notwendig werden, z.B. Kalibration, mathematische Operationen, Langzeitspeicherung, etc.

Für DSP-Systeme welche am Ausgang wieder ein analoges Signal liefern müssen, werden auch kombinierte AD-DA Wandler angeboten. Sie werden als CODEC (**C**oder-**D**ecoder) bezeichnet.

3.1 AD-Wandler

Aufgabe des AD-Wandlers ist es eine Spannung in eine proportionale binäre Zahl umzuwandeln. Die Wandlung erfolgt für Messzwecke meist linear kann aber z.B. für Telekomwendungen auch gewichtet (μ -Law, a-Law) erfolgen.

Man unterscheidet heute vier gebräuchliche Verfahren:

- Parallelverfahren (1 Wort pro Zyklus)
- Zählverfahren (Single-/Dual Slope) (1 Digit pro Zyklus)
- Sukzessive Approximation (1 Pegel pro Zyklus)
- $\Delta\Sigma$ -Verfahren (Überabstastverfahren)

Auch Mischformen wie Half-Flash-Wandler, Kaskaden $\Delta\Sigma$ -Wandler sind üblich.

Die Wandler unterscheiden sich in Präzision (Bitbreite), Umsetzfehler (Linearität), Wandlungszeit (max. Samplerate), Methode, Aufwand, Ausgangsinterface und Preis. Generell gilt: Je höher die geforderte Umsetzgenauigkeit, desto grösser die notwendige Umsetzzeit. Ferner je schneller und präziser, desto teurer.

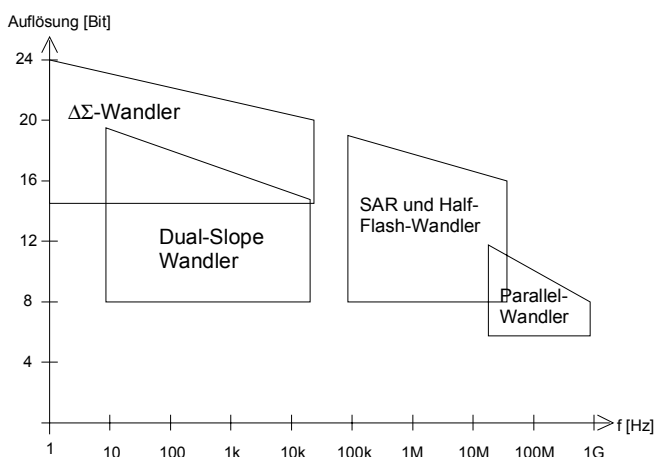


Bild 3-1: Maximal mögliche Umsetzfrequenzen von AD-Wandler in integrierter Technik. Stand: 1999, nach Unterlagen von Burr-Brown und Maxim.

Mittlerweile werden die Wandler fast ausschliesslich in monolithischer Technologie gefertigt. Hybrid- oder diskrete Module waren in den 70er Jahren noch üblich, werden aber heute nur für (sehr teure) Spezialanwendungen eingesetzt (Bsp. Burr-Brown)

3.1.3 AD-Wandler Kenngrößen

Die Kenngrößen verkörpern Auswahlkriterien. Sie sind durch die Wandlungsmethode in gewissen Grenzen vorgegeben. Eine zusammenfassende Beschreibung der Kenngrößen wird nach [ZOE97]:

Auflösung

Sie besagt, welche Wortbreite N in Bits zur Umsetzung verwendet wird. Daraus folgt die Wandlungsgenauigkeit (Resolution) der AD-Wandlung. Die kleinste umsetzbare Amplitude bei gegebener Wortbreite N wird:

$$x_{\min} = Q = x_{\max} 2^{-(N-1)} \quad (3-1)$$

Q verkörpert die Quantisierungsstufe, d.h. Pegeldifferenz für ein LSB am Ausgang.

Wandlungszeit

Sie beschreibt die minimal notwendige Zeit, die der Wandler zur Umsetzung benötigt.

Abtast-Halteschaltung (Sample&Hold-Schaltung)

Sie hält als Analogspeicher die Eingangsspannung während der Dauer der Wandlung konstant. Das Abtastintervall T_A wird dabei in eine Abtastzeit t_{ST} und eine Haltezeit t_H unterteilt. In der Abtastzeit t_{ST} wird das Eingangssignal erfasst und gespeichert. In der folgenden Haltezeit t_H erfolgt die Wandlung der konstanten Spannung in ein binäres Wort

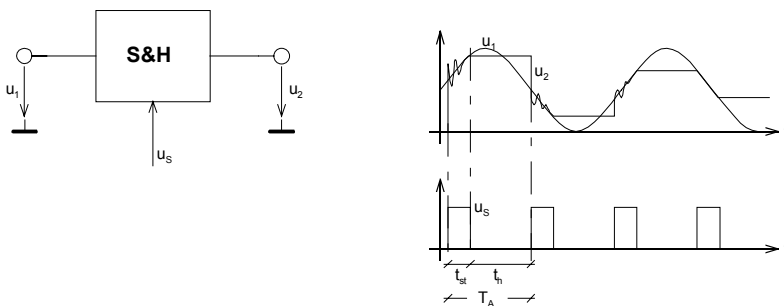


Bild 3-2: Sample&Hold-Schaltung mit Darstellung der Takt-, Ein- und Ausgangssignale.

Bild nach [ZOE99]

Apertur-Verzögerung

Zeitspanne zwischen dem Anlegen des Haltemodus und dem tatsächlichen Übergang in den Haltemodus.

Apertur-Jitter

Variation der Aperturverzögerung. Der Apertur-Jitters beschränkt die nutzbare Bandbreite des abzutastenden Signals, weil der Einfluss zu einer Verschlechterung des Signal-Rauschabstandes bei höheren Frequenzen führt.

Offset- und Verstärkungsfehler

Offsetfehler äussern sich in einer seitlichen Verschiebung der Umsetzkennlinie. Verstärkungsfehler in einer Abweichung der idealen Steigung. Meist kann schaltungstechnisch eine Kompensation erfolgen.

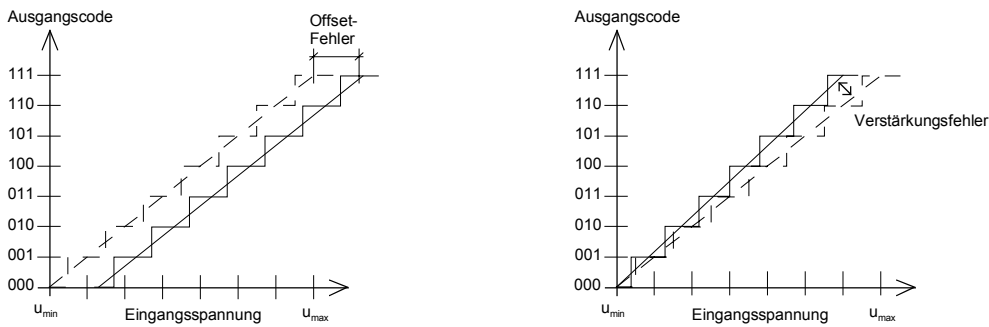


Bild 3-3: Einfluss der Offset- und Verstärkungsfehler beim AD-Wandler.
 Bild nach [ZOE99]

Monotonie

Bei gleichmässig steigender Eingangsspannung wird eine gleichmässig steigende Ausgangsspannung in Quantisierungsschritten erwartet. Bei Monotoniefehler treten gewisse Ausgangscodes nicht auf (Missing Codes).

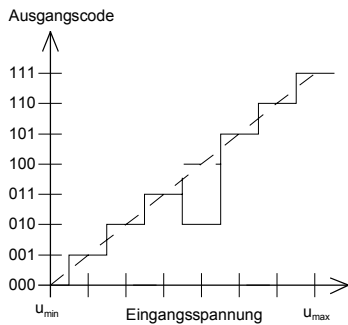


Bild 3-4: Monotoniefehler beim AD-Wandler. Sie äussern sich in „Missing Codes“.
 Bild nach [ZOE99]

Integrale Nichtlinearität (INL)

Sie beschreibt den Fehler zwischen quantisiertem Wert und dem idealen kontinuierlichen Wert. Er wird in Anzahl LSB angeben.

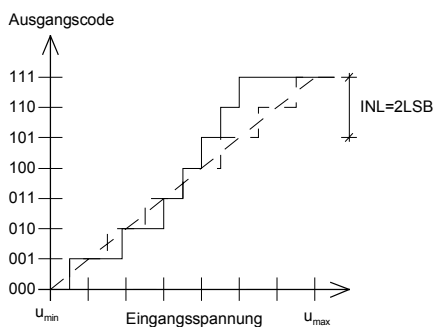


Bild 3-5: Integrale Nichtlinearität als Abweichung zwischen tatsächlichem und idealem Wert.
 Bild nach [ZOE99]

Differenzielle Nichtlinearität

Idealerweise sind alle Quantisierungsstufen gleich breit. Die differenzielle Nichtlinearität (DNL) beschreibt den maximalen Stufenbreitenfehler in Anzahl LSB.

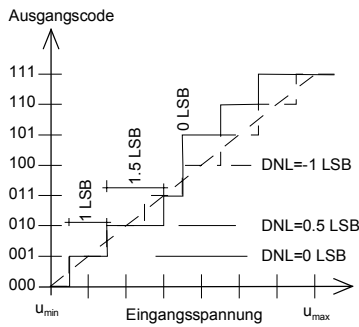


Bild 3-6: Differenzielle Nichtlinearität als Auswirkung der nicht äquidistanten Quantisierungsstufenbreite. Bild nach [ZOE99]

3.1.4 Nyquist-Abtastung

Erfolgt die Abtastung eines Analogsignals f_A mit einer Abtastfrequenz $f_s > 2f_A$, spricht man von Nyquist-Abtastung.

Mathematisch gesehen, entspricht die Abtastung einer Eingangsspannung $u_1(t)$ einer Faltung mit dem periodischen Dirac-Puls der Periode T_s .

$$\tilde{u}_1(t) = T_s \sum_{k=0}^{\infty} u_1(kT_s) \delta(t - kT_s) \tag{3-2}$$

Wir erhalten eine Impulsfolge in der Art wie in Bild 3-7. dargestellt mit den Werten $u_1(0)$, $u_1(T_s)$, $u_2(2T_s)$,...

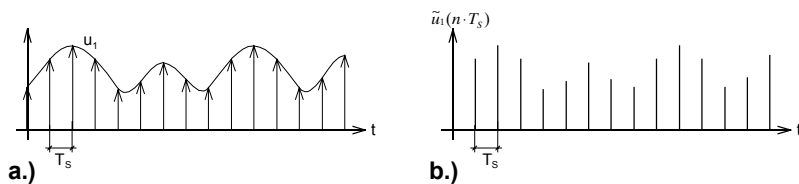


Bild 3-7: Abtastung eines analogen Eingangssignales mit einer periodischen Folge von Diracstößen (a) und resultierenden Impulsfolge (b).

Bereits ohne grosse mathematische Analyse lässt sich vermuten, dass durch die steilflankigen Impulse das Frequenzspektrum des ursprünglichen Eingangssignales verändert wird, indem höherfrequente Anteile zugefügt werden.

Das Spektrum des abgetasteten Signals wird mit einer Fourier-Transformation der abgetasteten Spannung $\tilde{u}_1(t)$ nach (3-1):

$$\tilde{X}(jf) = T_s \sum_{k=0}^{\infty} u_1(k \cdot T_s) \cdot e^{-2kj\pi f T_s} \tag{3-3}$$

Man erkennt das periodische Spektrum, wobei die Periodizität gleich der Abtastfrequenz f_s ist. Ferner ist das Spektrum der abgetasteten Funktion $|\tilde{X}(jf)|$ im Bereich $-\frac{1}{2}f_s \leq f \leq \frac{1}{2}f_s$ identisch mit dem Spektrum des Eingangssignales $|X(jf)|$. Dies ist insofern bemerkenswert, weil meist nur wenige Abtastwerte zur Bestimmung benutzt werden.

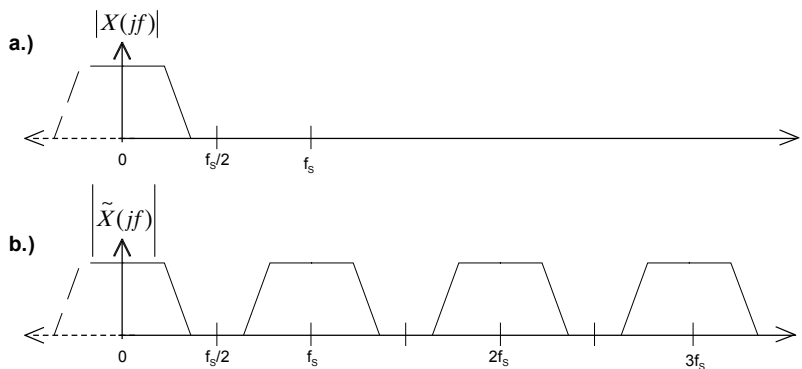


Bild 3-8: Spektrenduplizierung bei der Abtastung:
a.) Eingangsspektrum
b.) Periodisches Ausgangsspektrum nach der Abtastung.

Das Originalspektrum erscheint solange unverändert wie sich die periodisch wiederkehrenden Spektren nicht überlappen. Überlappen sich die Spektren, treten sog. Aliasing-Effekte auf.

Aus obigen Forderungen ergibt sich das Nyquist-Kriterium für die Abtastung:

$$f_s > 2f_{\max} \tag{3-4}$$

Daher kann ein abgetastetes Signal vollständig in Amplitude und Phase rekonstruiert werden, wenn mehr als zwei Abtastwerte pro Periode vorliegen. Die Gleichheit gilt übrigens in (3-4) nicht!

In der Praxis kann die Abtastung nicht mit einer idealen Dirac-Funktion erfolgen, sondern mit einem Rechteckfenster schmalere Breite. Dies wirkt aber wie ein Tiefpassfilter, indem das Spektrum mit einer si-Funktion gewichtet wird.

$$\tilde{X}^*(jf) = \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot T_s)}{\pi \cdot f \cdot T_s} T_s \sum_{k=0}^{\infty} u_1(k \cdot T_s) \cdot e^{-2kj\pi f T_s} = \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot T_s)}{\pi \cdot f \cdot T_s} \tilde{X}(jf) \tag{3-5}$$

Bei der halben Abtastfrequenz tritt durch die si-Funktion eine Abschwächung um den Faktor 0.64 auf. Beim Entwurf von Filtern ist diese Verzerrung zu berücksichtigen und wird bei Filtersyntheseprogrammen meist automatisch durchgeführt.

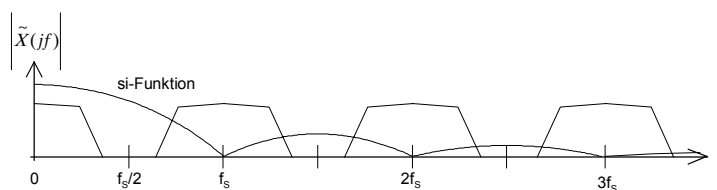


Bild 3-9: Si-bewertetes Ausgangsspektrum nach der Abtastung mit einem nicht-Dirac-Abtaster.

Zusammenfassung:

Bei Nyquist-Abtastung erscheint das Spektrum des Eingangssignals jeweils alle f_s gespiegelt. Das hat zur Konsequenz, dass in ein System mit Nyquist-Abtastung nur Eingangsfrequenzen bis $f_s/2$ eingespielt werden können, sonst treten Aliasing-Effekte auf. Durch ein analoges Tiefpassfilter vor dem Abtaster wird sichergestellt, dass die Eingangsfrequenzen über $f_s/2$ genügend gedämpft werden. Ist das Eingangssignal bereits genügend bandbreitenbegrenzt kann das Filter auch entfallen. Durch die nicht ideale Abtastung erscheint das Spektrum mit einer si-Funktion gewichtet, d.h. spektral höhere Frequenzen werden abgeschwächt. Richtwert: 64% bei $f_s/2$.

3.1.5 Überabtastverfahren

Zur Reduktion des analogen Filteraufwandes und zur Erhöhung der Wandlungsgenauigkeit werden vielfach Überabtastverfahren eingesetzt. Dabei wird das Eingangssignal mit einem ganzzahligen Vielfachen L der Abtastfrequenz abgetastet und gewandelt. Am Ausgang erfolgt eine Abtastratenwandlung (Dezimierung um L) auf die gewünschte Abtastrate.

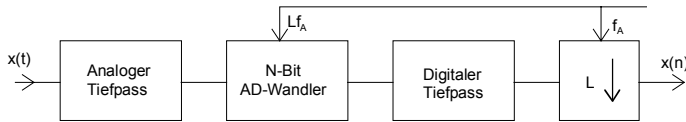


Bild 3-10: Prinzip eines überabtastenden AD-Wandlers.

Vorteile:

Wegen der spektralen Gleichverteilung der Fehlerleistung zwischen 0 und der Abtastfrequenz f_s kann bei einem Überabtastverfahren mit $L \cdot f_s$ im Nutzband um den Faktor L abgesenkt werden. Bei gleich grossen Quantisierungsstufen Q wird die spektrale Leistungsdichte S_{ee} des Quantisierungsfehlers:

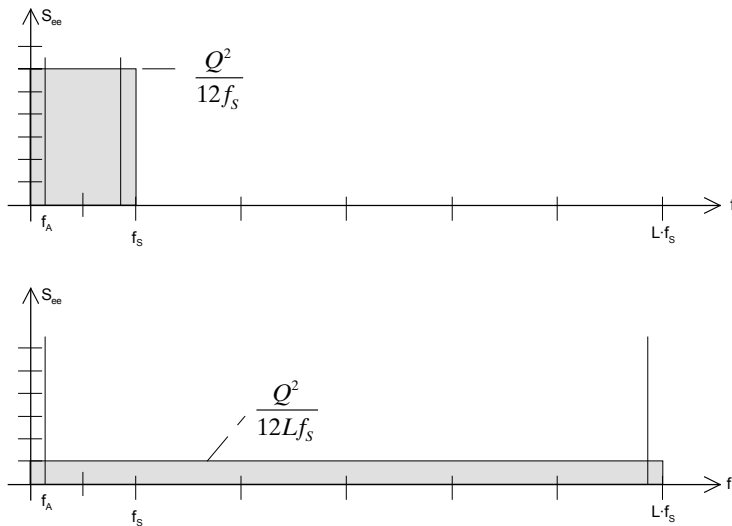


Bild 3-11: Spektrale Leistungsdichte des Quantisierungsfehlers Q bei oben: einfacher Abtastung unten: L -facher Überabtastung Nach: [ZOE97], S.68

Im Nutzband $[-f_A, +f_A]$ wird nach [ZOE97], S.68, bei Einfach-Abtastung mit $f_s = 2f_A$ und dem Leistungsdichtespektrum $S_{ee}(f) = \frac{Q^2}{12f_s}$ die Fehlerleistung:

$$N_A^2 = \sigma_E^2 = 2 \int_0^{f_A} S_{ee}(f) df = \frac{Q^2}{12} \tag{3-6}$$

Bei Überabtastung erfolgt eine Reduktion der spektralen Leistungsdichte des Quantisierungsfehlers im Nutzband um den Faktor $\frac{1}{L}$. Dies ergibt eine Fehlerleistung:

$$N_A^2 = \sigma_E^2 = \frac{Q^2}{12} \frac{1}{L} \tag{3-7}$$

Da bei Überabtastung der Frequenzbereich des analogen Filters am Eingang bis $L \cdot f_s - \frac{f_s}{2}$ reicht, können einfachere Filter verwendet werden. Nach erfolgter Wandlung werden mit einem digitalen Filter alle Frequenzen $> f_s/2$ abgefiltert. Der Abtastratenwandler reduziert die Abtastrate um den Faktor L , indem jeder L -te Wert aus dem digitalen Tiefpassfilter übernommen wird.

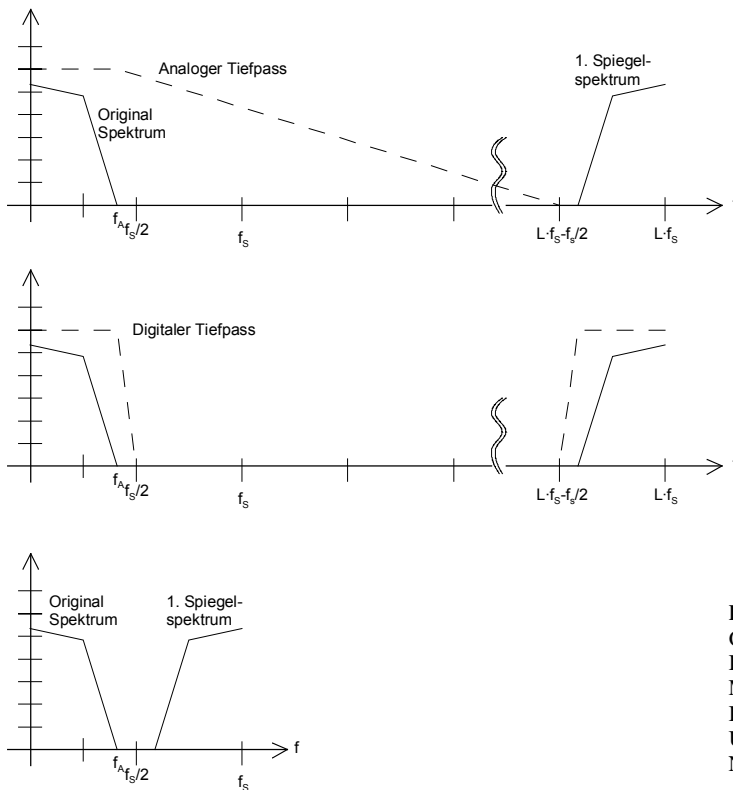


Bild 3-12: Spektren am überabtaastenden AD-Wandler. Oben: Anforderung an den analogen Tiefpass und Spektrum bei L -facher Abtastung. Mitte: Filterung mit digitalem Tiefpass nach AD-Wandlung bei L -facher Abtastrate. Unten: Spektrum nach erfolgter Abtastratenreduktion. Nach [ZOE97],S.69

3.1.6 Sample& Hold Schaltungen

Sample und Hold-Schaltungen sind integraler Bestandteil der AD-Wandler. Aufgabe der S&H Schaltungen ist die Eingangsspannung durch Analogspeicherung während des Umsetzprozesses konstant zu halten. Würde der AD-Wandler ohne S&H-Glied betrieben könnten nur Eingangsspannungen mit geringen Anstiegsgeschwindigkeiten umgesetzt werden.

Die schematische Ausführung eines Sample & Hold Gliedes:

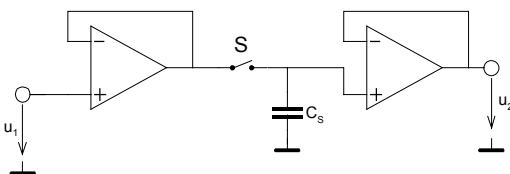


Bild 3-13: Funktioneller Aufbau einer Sample&Hold Schaltung.

Während der Schalter S geschlossen wird, erfolgt die Ladung des Kondensators auf den Wert der Eingangsspannung. Wird S geöffnet, wird der Wert der Kondensatorspannung gehalten. Die beiden OpAmps dienen zur Entkopplung, damit der Kondensator einerseits möglichst rasch der Eingangsspannung folgt, und andererseits die Ladung im Haltezustand lange erhalten bleibt und zwar unabhängig von der Belastung.

Zu den nicht idealen Eigenschaften der Sample&Hold-Schaltungen zählt die beschränkte Anstiegsgeschwindigkeit. Sie wird hauptsächlich durch den Maximalstrom des Impedanzwandlers am Eingang bestimmt.

Dann folgt ein Einschwingvorgang, der durch die parasitären Widerstände des Schalters und vom Ausgangswiderstand des Impedanzwandlers bestimmt wird. Nach der sog. Einstellzeit T_E hat die Ausgangsspannung den Wert der Eingangsspannung mit einer definierten Toleranz erreicht.

Wenn der Schalter S geöffnet wird, erfolgt der Wechsel in den Haltezustand. Der Schalter braucht dafür eine bestimmte Zeit zum Öffnen, die sog. Aperturzeit t_{apu} . Sie ist meist nicht konstant sondern schwankt in Abhängigkeit von der Eingangsspannung. Die Schwankung wird als Apertur-Jitter bezeichnet.

Die wichtigste Grösse im Haltezustand ist Haltedrift (Droop). Sie beschreibt, um wieviel sich die Ausgangsspannung durch Selbstentladung verändert. Diese Grösse wird durch das Dielektrikum des Speicherkondensators, den Sperrstrom des Schalters und den Eingangsstrom des Impedanzwandlers bestimmt.

S&H-Schaltungen werden mittlerweile ausschliesslich als IC eingesetzt. Eine Zusammenstellung gängige S&H-Schaltung nach [TIE99] ist:

Typ	Hersteller	Speicher- kondensator	Einstellzeit	Genauigkeit	Max. Anstiegsgeschw.	Haltedrift	Technologie
LF398	viele	10nF	20us	10Bit	0.5V/us	3mV/s	BiFET
LF398	viele	1nF	4us	10Bit	5V/us	30mV/s	BiFET
AD585	Analog Devices	100pF (intern)	3us	12Bit	10V/us	100mV/s	Bipolar
SHC5320	Burr-Brown	100pF(intern)	1.5us	12Bit	45V/us	100mV/s	Bipolar
SHM20	Datel	intern	1us	12Bit	45V/us	100mV/s	Bipolar
CS3112	Crystal	intern	1us	12Bit	4V/us	1mV/s	CMOS
CS31412 ⁴	Crystal	intern	1us	12Bit	4V/us	1mV/s	CMOS
AD781	Analog Devices	intern	0.6us	12Bit	60V/us	10mV/s	BIMOS
AD682 ²	Analog Devices	intern	0.6us	12Bit	60V/us	10mV/s	BIMOS
AD684 ⁴	Analog Devices	intern	0.6us	12Bit	60V/us	10mV/s	BIMOS
HA5330	Harris	90pF(intern)	0.5us	12Bit	90V/us	10mV/s	Bipolar
AD783	Analog Devices	intern	0.2us	12Bit	50V/us	20mV/s	BIMOS
LF6197	National	10pF(intern)	0.2us	12Bit	145V/us	0.6V/s	BiFET
HA5330	Harris	intern	50ns	12Bit	130V/us	100V/s	Bipolar
AD9100	Analog Devices	22pF(intern)	16ns	12Bit	850V/us	1kV/s	Bipolar
SHM12	Datel	15pF(intern)	15ns	12Bit	350V	500V/s	Bipolar
AD9101	Analog Devices	intern	7ns	10Bit	1.8kV/us	5kV/s	Bipolar
SHC702	Burr-Brown	intern	0.5us	16Bit	150V/us	0.2V/s	Hybrid
SP9760	Sipex	intern	0.35us	16Bit	120V/us	1V/us	Hybrid
SHC803	Burr-Brown	intern	0.25us	12Bit	160V/us	0.5V/s	Hybrid
SHC49	Datel	intern	0.16us	12Bit	300V/us	0.5V/s	Hybrid
HS9730	Sipex	intern	0.12us	12Bit	200V/us	50V/s	Hybrid
SHM43	Datel	intern	35ns	12Bit	250V/us	1V/s	Hybrid
CL942	Comlinear	intern	25ns	12Bit	300V/us	20V/s	Hybrid
SHC601	Burr-Brown	intern	12ns	10Bit	350V/us	20V/s	Hybrid
HTS0010	Analog Devices	intern	10ns	8Bit	300V/us	50V/s	Hybrid
CL940	Comlinear	intern	10ns	8Bit	500V/us	20V/s	Hybrid

²: Zweifach-S&H ⁴: Vierfach-S&H

Beispiel 3-1: Maximale Anstiegsgeschwindigkeit beim AD-Wandler mit und ohne S&H

Da für eine fehlerfreie Quantisierung die Spannungsänderung der Umsetzung kleiner als eine Quantisierungsstufe sein muss, die maximale Eingangsspannungsänderung für ein N-Bit Wandler allgemein:

$$\left. \frac{dU}{dt} \right|_{\max} = 2^{-N} \frac{u_{\max}}{t_{\text{con}}}$$

u_{\max} : Max. Eingangsspannung [V]
 t_{con} : Umsetzzeit [s]
 N : Wortbreite des Wandlers [Bit]

So kann für einen 12Bit AD-Wandler (1/4096 Auflösung) ohne S&H-Schaltung nach mit einem $u_{\max}=10V$ und einer Umsetzzeit $t_{\text{con}}=0.1s$ die maximal zulässige Eingangsspannungsänderung:

$$\left. \frac{dU}{dt} \right|_{\max} = 2^{-12} \frac{10}{0.1} = 0.0244 \frac{V}{s}$$

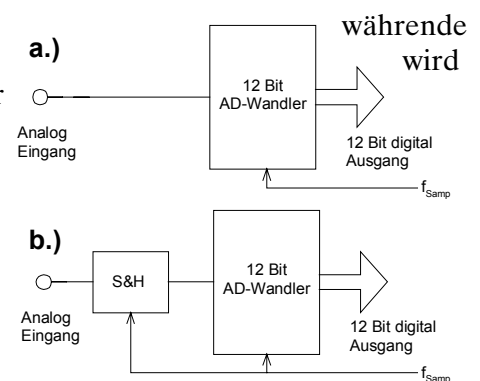


Bild 3-14: AD-Wandler nach Beispiel 3-1:
 a.) Einfachst-Wandler ohne Halteglied.
 b.) AD-Wandler mit Halteglied

Wird hingegen eine Sample&Hold-Schaltung verwendet, wird die Umsetzzeit des AD-Wandlers bedeutungslos. An ihre Stelle tritt die Apertur-Jitterzeit t_{apu} . Unter Verwendung eines S&H-Gliedes mit einer Apertur-Jitterzeit von $t_{apu}=3\text{ns}$ wird die maximal zulässige Eingangsspannungsänderung:

$$\left. \frac{dU}{dt} \right|_{\max} = 2^{-N} \frac{u_{\max}}{t_{apu}} = 2^{-12} \frac{10}{3 \cdot 10^{-9}} = 813.8 \frac{\text{kV}}{\text{s}} = 0.8138 \frac{\text{V}}{\mu\text{s}}$$

Obwohl auch das zweite Resultat nicht berauschend ist, erkennt man aus diesem Beispiel die Notwendigkeit einer Sample&Hold-Schaltung für AD-Wandler und kann abschätzen, welche Anforderungen an den Apertur-Jitter gestellt werden müssen. Ebenso hat die Slew-Rate der S&H-Schaltung einen Einfluss und muss berücksichtigt werden.

3.1.7 Parallelverfahren

Beim Parallelverfahren (Flash-Verfahren) erfolgt eine direkte Umsetzung indem für jeden möglichen Ausgangswert ein eigener Komparator verwendet wird. Parallel-Wandler sind dadurch sehr schnell aber in ihrer Auflösung beschränkt, das der Aufwand exponentiell ansteigt.

In integrierter Technik sind direkte Umsetzraten von >1GHz bei > 8Bit möglich. Beispiel: Digital-Speicher KO der neuesten Generation.

Arbeitsweise

Beim Parallelverfahren erfolgt die gesamte Wandlung in einem Taktzyklus. Der Aufwand nimmt aber mit steigender Umsetzgenauigkeit exponentiell zu. Ein 10-Bit Wandler braucht 1023 Komparatoren, deren Schaltpunkte auch präzise sein müssen.

Typischer Aufbau eines Parallel-Wandlers:

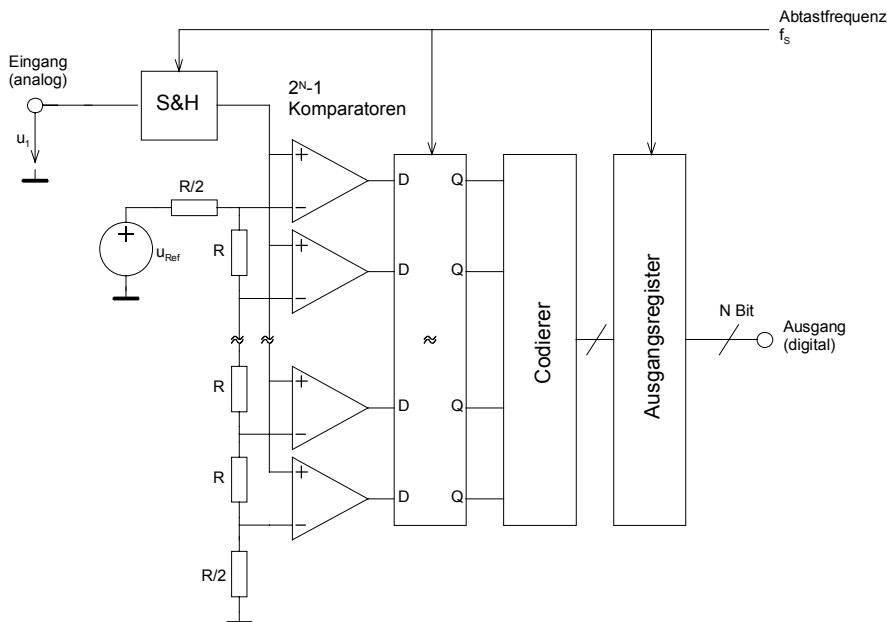


Bild 3-15: Prinzip-Blockschaltbild eines AD-Wandlers nach dem Parallelverfahren.

Die Sample&Hold-Schaltung hält die Eingangsspannung während der Wandlung konstant. Die Ansteuerung erfolgt mit der Abtastfrequenz f_s . Die 2^N-1 Komparatoren vergleichen den gehaltenen Wert mit Referenzspannungen, die aus einer Referenzspannungsquelle über ein Spannungsteilernetzwerk gebildet werden.

Das D-Register speichert die Komparatorzustände. Mit dem Register wird sichergestellt, dass aufgrund unterschiedlicher Komparatorlaufzeiten keine falschen Werte am Ausgang erscheinen. Es erfüllt daher die Funktion eines digitalen Sample&Hold-Gliedes. Ein Codierer liefert am Ausgang

den Binärcode der zugehörigen gespeicherten Komparatorzustände.

Bei Wandler für sehr hohe Abtastraten wird häufig auf das analoge Sample&Hold-Glied am Eingang verzichtet. Nach [TIE99] haben schnelle Halteglieder eine beträchtliche Drift und daher wird die Genauigkeit beeinträchtigt. Die heute erreichbaren Abtastraten liegen bei 1GHz und 8-12Bit

Beispiele für handelsübliche Parallel-AD-Wandler sind nach [TIE99]:

Typ	Hersteller	Abtastfrequenz	Betriebsspannung	Verlustleistung	Eing. Kapazität	Apertur-Jitter	Logik Familie
8Bit							
ADC307	Datel	125MHz	-5.2V	870mW			ECL
ADC309	Datel	500MHz	-5.2V	2800mW	6pF	11ps	ECL
HI306	Harris	140MHz	+5V	360mW	21pF	10ps	TTL
MAX104	Maxim	1000MHz	±5V	3500mW			ECL
MAX1114	Maxim	150MHz	-5.2V	2200mW	10pF	5ps	ECL
MAX1150	Maxim	500MHz	-5.2V	5500mW	15pF	2ps	ECL
MAX1151	Maxim	750MHz	-5.2V	5500mW	15pF	2ps	ECL
TDA7818	Philips	600MHz	-5.2V	990mW	5pF		ECL
TDA8793	Philips	100MHz	+3.3V	150mW	2pF		CMOS
CXA1276	Sony	500MHz	-5.2V	2800mW			ECL
SPT7710	CPT	150MHz	-5.2V	2200mW	10pF	5ps	ECL
SPT7750	CPT	500MHz	-5.2V	5500mW	15pF	2ps	ECL
SPT7760	CPT	1000MHz	-5.2V	5500mW	15pF	2ps	ECL
10Bit							
AD9020	Analog Devices	60MHz	±5V	2800mW	45pF	5ps	TTL
AD9060	Analog Devices	75MHz	±5V	2800mW	45pF	5ps	ECL
TDA8762	Philips	80MHz	+5V	380mW	5pF		CMOS

3.1.8 Kaskaden-Wandler

Man kann den Aufwand des Parallelverfahrens für grössere Wortbreiten reduzieren, wenn Kompromisse in Umsetzungsgeschwindigkeit eingegangen werden. Umsetzraten von >100MHz bei 10Bit sind aber problemlos erreichbar.

Beim Kaskadenprinzip in zwei m -Bit Wandlungen, wobei $N=2m$. Es erfolgt zuerst eine „Grobdigitalisierung“ der höherwertigen m Bits. Anschliessend werden die niederwertigen m Bits digitalisiert. Intern werden für beide Aktionen Parallel-Wandler benutzt.

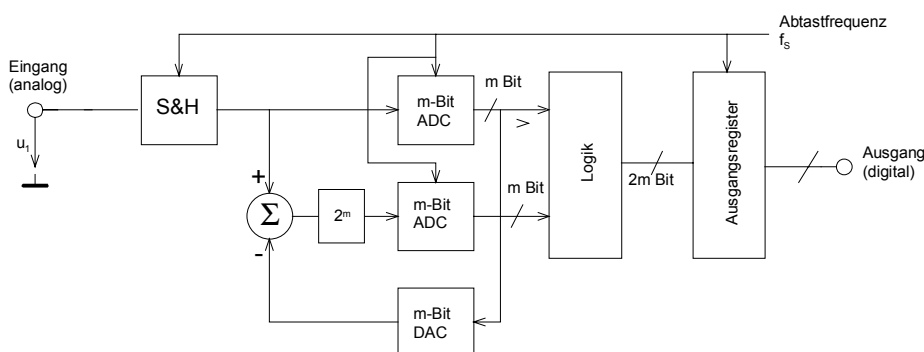


Bild 3-16: Blockschaltbild eines Kaskaden-AD-Wandlers (Half-Flash).

So kann ein 10Bit Wandler durch eine Kaskade zweier 5Bit Parallel-Wandler realisiert werden. Dabei wird in einem ersten Schritt eine Grobquantisierung mit 5 Bit durchgeführt. Ein DA-Wandler bildet die zu diesem effektiv gehörende Spannung. In einem Subtrahierer wird die Differenz der noch zu digitalisierenden Spannung gebildet. Dies erfolgt in einem zweiten 5 Bit Wandler.

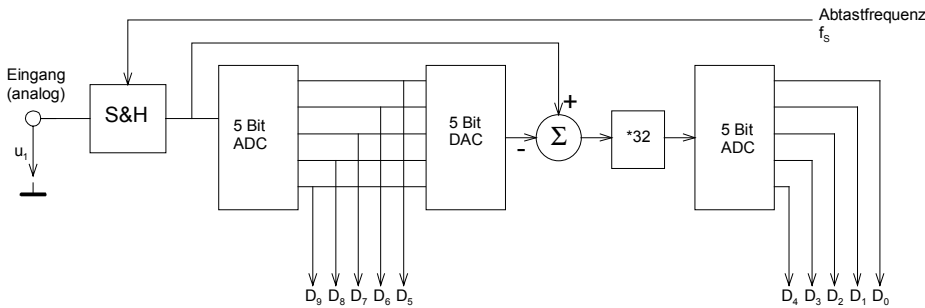


Bild 3-17: Beispiel eines 10-Bit Half-Flash-Wandlers mit zwei 5-Bit Umsetzer.

Beispiel nach [TIE99], S.1051

Allerdings sind bei diesem Verfahren die Anforderung an den ersten AD-Wandler sehr hoch. Er muss über volle Umsetzgenauigkeit (d.h. 10Bit Präzision) verfügen, obwohl er nicht volle Wortbreite hat. Sonst wird die gebildete Differenz falsch und der zweite AD-Wandler wird übersteuert. Dies äussert sich in Missing Codes. Eine digitale Fehlerkorrektur mit erhöhtem Schaltungsaufwand ist in Grenzen möglich, vgl. hierzu [TIE99], S.1051.

Beim Subranging-Prinzip erfolgt auch eine Aufteilung in zwei m -Bit Wandlungen. Die Wandlung beider Gruppen erfolgt aber sequentiell, wobei nur ein AD-Wandler benötigt wird. Die Umsetzzeit steigt aber gegenüber dem Half-Flash-Kaskadenwandler an.

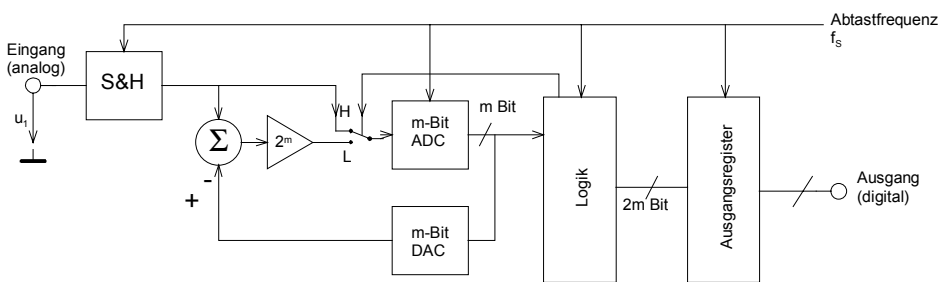


Bild 3-18: Blockschaltbild Subranging Wandler.

Im ersten Zyklus steht der Schalter in Stellung H. Es erfolgt die Wandlung der höherwertigen m Bits. Im zweiten Schritt steht der Schalter auf L. Am AD-Wandler steht die um 2^m verstärkte Differenzspannung an. Diese bestimmt die niederwertigen m Bits. Die Ablaufsteuerung erfolgt durch die Logik die mit der Abtastfrequenz getaktet wird.

3.1.9 Sukzessive Approximation (SAR)

N -Bit Wandler mit sukzessiver Approximation wandeln eine Eingangsspannung innerhalb von N Zyklen um. Dabei wird ein Wägeverfahren angewandt: Die Eingangsspannung wird solange mit dem Analogwert des systematisch erzeugten Ausgangswertes verglichen (gewogen), bis beide Werte gleich sind.

Dabei wird mit einem Komparator der aktuelle Analogwert mit der Spannung eines DA-Wandlers verglichen, die dem aktuell digitalisierten Wert entspricht. Das SAR bestimmt nun bitweise mit Hilfe eines Wägeverfahrens ob die Eingangsspannung grösser oder kleiner als die Ausgangsspannung des DA-Wandlers ist.

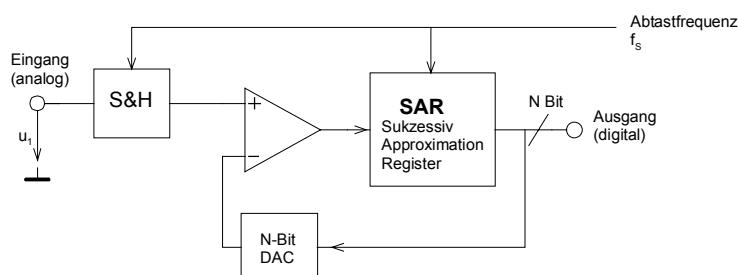


Bild 3-19: Blockschaltbild eines Wandlers nach dem Verfahren der Sukzessiven Approximation.

Das Verfahren kann mit einer binären Suche in maximal N Zyklen den Wert bestimmen. Dabei wird mit dem höchstwertigen Bit begonnen und geprüft, ob die Eingangsspannung grösser oder kleiner ist. Ist sie grösser, wird das Bit beibehalten. Ist sie kleiner, wird das Bit Null gesetzt. Diese Prozedur wird für jede binäre Stelle wiederholt. Der Wandler approximiert schrittweise den Wert in N Zyklen:

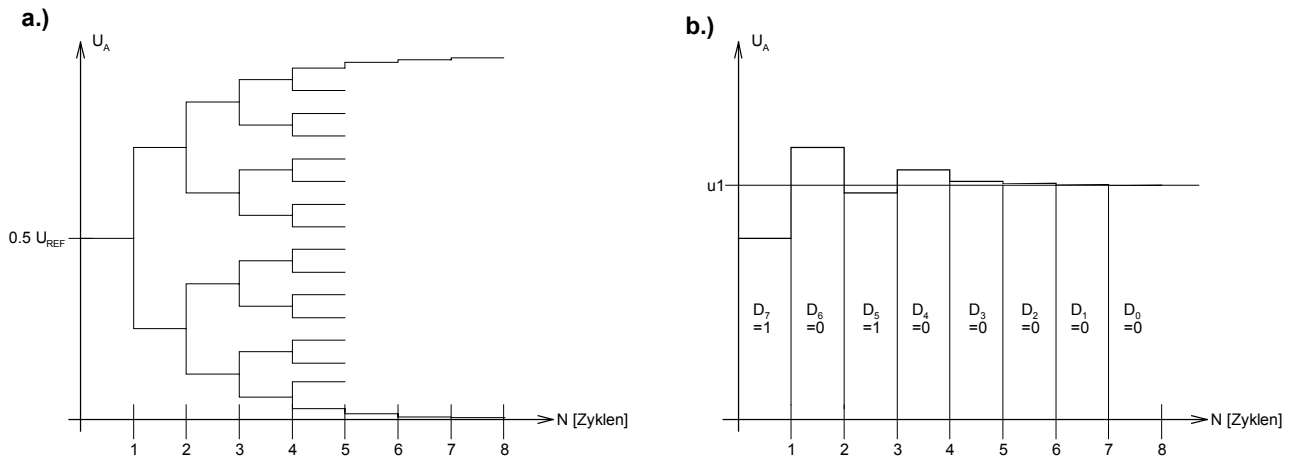


Bild 3-20:

a.) Sukzessive Approximation nach binärem Baum. Der Ausgangswert wird nach spätestens N Zyklen erreicht.
b.) Beispiel zur Entwicklung des Ausgangswertes beim SAR-Wandler

3.1.10 Zählverfahren

AD-Wandler nach dem Zählverfahren haben den geringsten Schaltungsaufwand, sind aber relativ langsam. Die Wandlungszeiten liegen im Bereich $1\text{ms}..1\text{s}$, je nach Auflösung und Abtastfrequenz. Daher werden diese Wandlertypen vor allem zur Messung bei langsam ändernden Spannungen eingesetzt, wie z.B. in Digitalvoltmetern und Temperaturmessern.

Unter dem Begriff „Zählverfahren-Wandler“ werden verschiedene Typen zusammengefasst.

- Tracking (Nachlaufverfahren)
- Single Slope (Ein-Rampen Verfahren)
- Dual Slope (Zwei Rampen Verfahren)

Das Dual-Slope Verfahren hat die grösste Verbreitung

Tracking Verfahren

Das Nachlaufverfahren arbeitet ähnlich dem SAR-Verfahren jedoch wird der digitale Wert mit einem gesteuerten Vor-Rückwärts-Zähler erzeugt. Da jeweils in einem Taktzyklus der Zähler nur um eine Stelle bewegt wird, erfolgt die Wandlung wesentlich langsamer als bei einem SAR-Wandler.

Vorteil der Tracking-Wandler ist der geringe Schaltungsaufwand. Da heute praktisch ausschliesslich mit IC-Wandler gearbeitet wird, fällt dieser Vorteil weg.

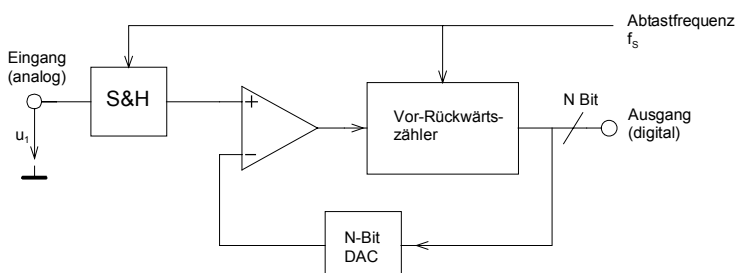


Bild 3-21: Blockschaltbild eines AD-Wandlers nach dem Tracking-Verfahren.

Dual-Slope Verfahren

Beim Dual-Slope Verfahren wird in einer ersten Phase das Eingangssignal eine definierte Zeit integriert (geladen). In der zweiten Phase erfolgt eine definierte Rückintegration (entladen) mit der Referenzspannung.

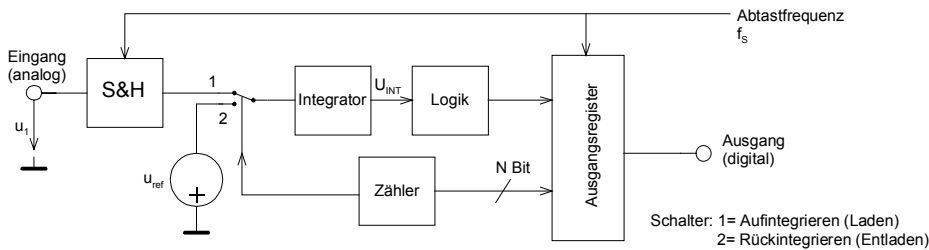


Bild 3-22: Blockschaltbild Dual-Slope Wandler.

Aus der Anzahl Takte, die zum Erreichen des Nullwertes gebraucht wurden, wird in einem Zähler der digitale Wert gebildet. Dies ist der Wert, der aus dem Verhältnis gebildet wird:

$$\frac{U_{1S}}{U_{Ref}} = \frac{t_2}{t_1} \tag{3-8}$$

Den Verlauf der Spannung am Integratorausgang für verschiedene Eingangsspannungen u_{1A} , u_{1B} , u_{1C} zeigt Bild 3-23. Man beachte, dass die Steigung der Entladekurve immer gleich ist, für unterschiedliche Eingangsspannung die Ladekurve aber unterschiedliche Steigung aufweist.

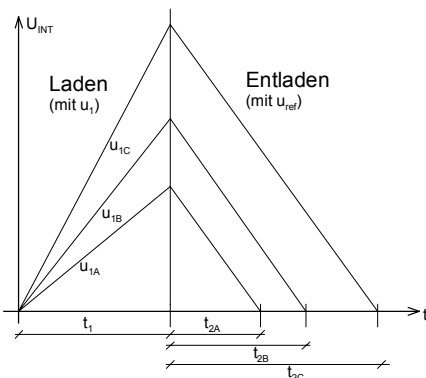


Bild 3-23: Lade- und Entladevorgänge beim Dual-Slope Wandler für verschiedene Eingangsspannungen.

3.1.11 Delta-Sigma Wandler

$\Delta\Sigma$ -Wandler sind überabtastende Wandler. Sie benötigen wegen der hohen Wandlungsrate vielfach kein Sample&Hold-Glied am Eingang. Ein analoger Tiefpass zur Bandbreitenbegrenzung ist aber schon aus Gründen der Störfestigkeit notwendig.

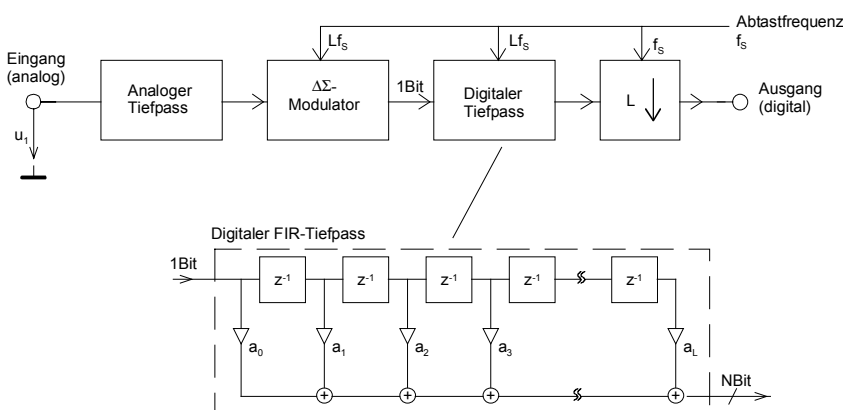


Bild 3-24: Blockschaltbild eines $\Delta\Sigma$ -Wandlers.

Der $\Delta\Sigma$ -Modulator ist ein 1-Bit Wandler und führt den 1/0 Wert auf das digitale Tiefpassfilter. Es stellt am Ausgang das gefilterte Signal als digitale N -Bit Folge zur Abtastratenreduktion bereit. Die Abtastratenwandlung erfolgt, indem einfach jeder L -te Wert übernommen und ausgegeben wird.

Mit $\Delta\Sigma$ -Sigma-Wandler können sehr hochwertige, d.h. fein auflösende, AD-Wandler realisiert werden. So sind Auflösungen mit 20-24 Bit für Eingangssignale bis 100kHz heute Stand der Technik. Dennoch sind AD-Wandler mit ≥ 16 Bit Auflösung in der Realisierung anspruchsvoll. Dem Layout, insbesondere Führung der digitalen und analogen Masseleitungen, ist grosse Beachtung zu schenken. Ebenso der Stromversorgung und Erzeugung der Referenzspannungen.

3.2 DA-Wandler

Sie wandeln einen digitalen Eingangswert in einen proportionalen analogen Ausgangswert um. Die Wandlung erfolgt bis auf das $\Delta\Sigma$ -Verfahren ausschliesslich in paralleler Form. Daher sind die erreichbaren Wandlungsraten hoch.

3.2.3 DA-Wandler Kenngrössen

Die Definition der Kenngrössen erfolgt analog den Aussagen zum AD-Wandler. Eine zusammenfassende Beschreibung der Kenngrössen wird nach [ZOE97]:

Auflösung

Sie besagt, welche Wortbreite N in Bits zur Umsetzung verwendet wird..

Einstellzeit (Settling Time)

Sie beschreibt die maximal notwendige Zeit t_{SE} , die vom Anlegen des binären Wortes am Eingang bis zum Erreichen des analogen Ausgangswertes innerhalb eines definierten Fehlerbandes. Sie ist daher als Umsetzzeit zu sehen. Die Einstellzeit definiert die maximale Wandlungsfrequenz mit $f_{max} = 1/t_{SE}$.

Offset- und Verstärkungsfehler

Offsetfehler äussern sich in einer seitlichen Verschiebung der Umsetzkennlinie. Verstärkungsfehler in einer Abweichung der idealen Steigung. Meist kann schaltungstechnisch eine Kompensation erfolgen.

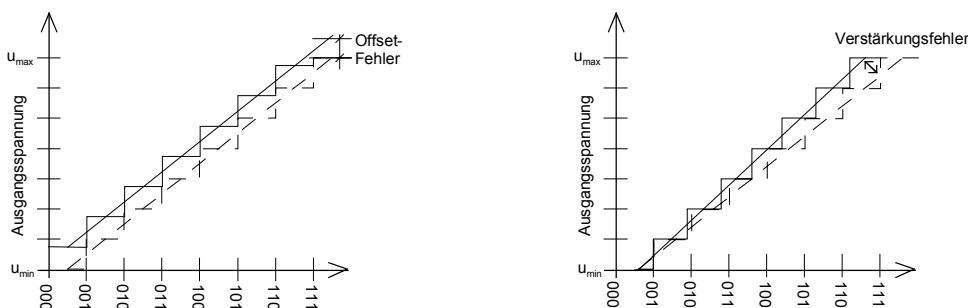


Bild 3-25: Einfluss der Offset- und Verstärkungsfehler beim DA-Wandler.
 Bild nach [ZOE99]

Monotonie

Bei gleichmässig steigender Eingangsspannung wird eine gleichmässig steigende Ausgangsspannung in Quantisierungsschritten erwartet. Bei Monotoniefehler treten gewisse Ausgangsspannungen nicht auf.

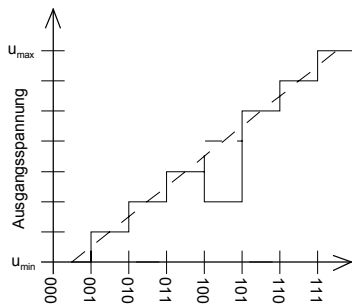


Bild 3-26: Monotoniefehler beim DA-Wandler. Sie äussern sich in „Missing Codes“. Bild nach [ZOE99]

Integrale Nichtlinearität (INL)

Sie beschreibt den Fehler zwischen der realen Ausgangsspannung und dem idealen Wert. Er wird in Anzahl LSB angegeben.

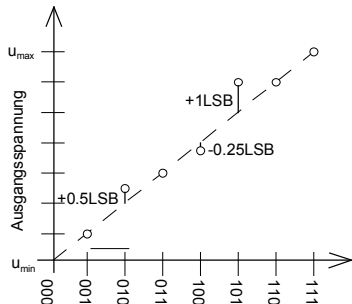


Bild 3-27: Integrale Nichtlinearität als Abweichung zwischen tatsächlichem und idealem Wert.

Differenzielle Nichtlinearität (DNL)

Idealerweise bewirkt eine Erhöhung des Codewortes um ein LSB eine Erhöhung der Ausgangsspannung um eine Quantisierungsstufe. Die differenzielle Nichtlinearität (DNL) beschreibt den maximalen Stufenbreitenfehler in Anzahl LSB.

3.2.4 Geschaltete Strom- und Spannungsquellen

Sie verkörpern die prinzipielle Methode nach denen eine Umsetzung des digitalen in den analogen Wert erfolgt.

Bei Wandlung mit geschalteten Spannungsquellen wird der Analogwert mit einer Spannungteilerkette bestimmt. Am Ausgang liegt eine schalterstellungsproportionale Spannung an. Bei grossen Bitbreiten wird die grosse Anzahl gleicher Widerstände und Schalter problematisch.

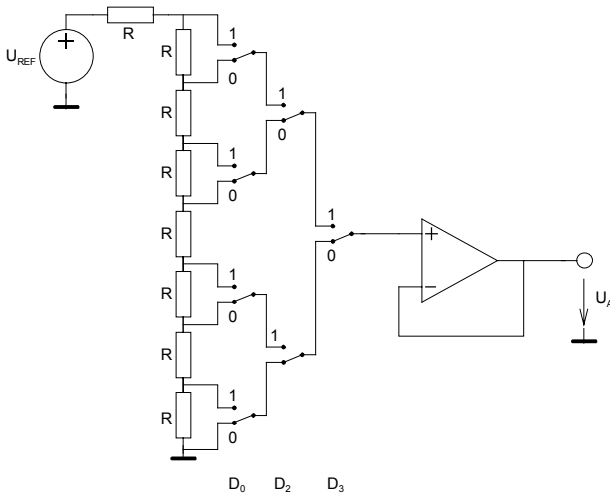


Bild 3-28: DA-Wandler mit geschalteten Spannungsquellen. Gezeigt am Beispiel eines 3-Bit DA-Wandlers.

Beim Wandler mit geschalteten Stromquellen wird für jeden Ausgangswert eine Stromquelle geschaltet. Der nachfolgende I/U-Wandler liefert am Ausgang eine stromproportionale Spannung.

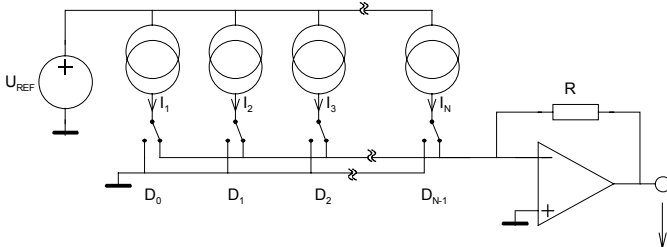


Bild 3-29: DA-Wandler mit geschalteten Stromquellen.

In der Praxis arbeiten die DA-Wandler meist auf der Grundlage der geschalteten Stromquellen.

3.2.5 Gewichtete Widerstände

Hierbei erfolgt eine Summation gewichteter Ströme, also nach dem Prinzip der geschalteten Stromquellen nach Bild 3-29. Durch einen Strom-Spannungswandler wird die Stromsumme in eine proportionale Spannung umgesetzt.

Für eine Wandlung mit N binär gewichteten Stromquellen der Grösse $I_1 = 2I_2 = 4I_3 = \dots = 2^{N-1}I_N$ wird die Ausgangsspannung U_A :

$$U_A = -R \cdot I = -R \sum_{i=0}^{N-1} I_i \quad (3-9)$$

Die Realisation der Stromquellen kann durch ein Widerstandsnetzwerk erfolgen, das von einer Referenzspannungsquelle gespeist wird:

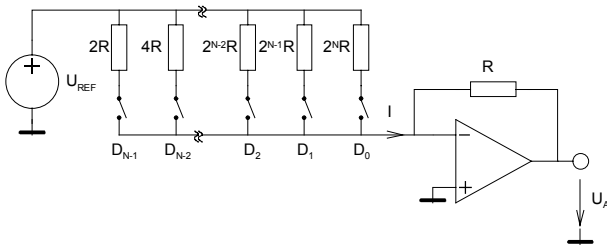


Bild 3-30: Realisation eines DA-Wandlers nach dem Prinzip der geschalteten Stromquellen. Die Ströme werden durch gewichtete Widerstände aus einer Referenzspannung erzeugt.

Da im Summierer alle Ströme ohne gegenseitige Beeinflussung aufsummiert werden, gilt:

$$U_A = -R \cdot I = -R \left(\frac{D_0}{2^N R} + \frac{D_1}{2^{N-1} R} + \frac{D_2}{2^{N-2} R} + \dots + \frac{D_{N-2}}{4R} + \frac{D_{N-1}}{2R} \right) U_{REF}$$

$$= -U_{REF} \left(\frac{D_0}{2^N} + \frac{D_1}{2^{N-1}} + \frac{D_2}{2^{N-2}} + \dots + \frac{D_{N-2}}{4} + \frac{D_{N-1}}{2} \right)$$

Wobei die D_N die binäre Wertigkeit (0/1) der einzelnen Stellen verkörpern. Zusammengefasst gilt für den Wandler mit gewichteten Widerständen:

$$U_A = -U_{REF} \frac{Z}{2^N} \quad I_1 = \frac{U_{REF}}{R} \frac{Z}{2^N} \quad Z = \text{Binärwort} \quad (3-10)$$

3.2.6 R-2R-Widerstandsnetzwerke in Leiterstruktur

Eine Umsetzung nach dem Verfahren der geschalteten Stromquellen kann mit einem R-2R Netzwerk mit Wechselschaltern erfolgen. Dies bringt ein kleineres maximales Widerstandsverhältnis und die Auswahl eng toleriert Widerstände wird daher einfacher.

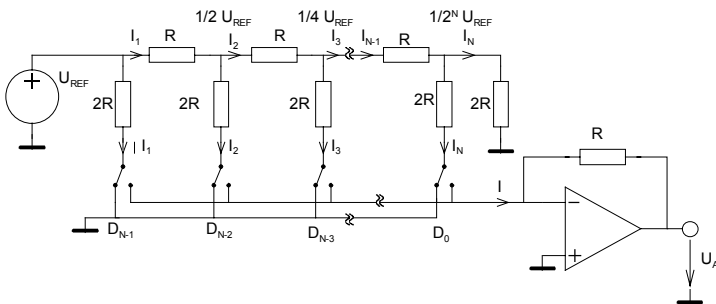


Bild 3-31: Verbesserte Schaltung für einen DA-Wandler mit einem R-2R Netzwerk.

Für diesen Wandlertyp wird die Ausgangsspannung für ein gegebenes Binärwort Z :

$$U_A = -U_{REF} \frac{Z}{Z_{max} + 1} \quad (3-11)$$

Die Herleitung der Formel kann durch Analyse des Leiternetzwerkes erfolgen. Die Vorhergehende Stufe stellt eine Quelle mit dem Innenwiderstand R dar. Vgl hierzu auch [TIE99], S. 1029.

3.2.7 Inverse Leiterstruktur

Bei dieser Form der DA-Wandlung wird am Ausgang direkt eine belastungsabhängige Spannung erzeugt. Dies erreicht man indem das Leiternetzwerk mit vertauschten Eingang und Ausgängen betrieben wird. Dadurch fällt auch der Summier-I/U-Wandler nach Bild 3-31 weg. Durch den Wegfall des Verstärkers erreicht man höhere maximale Umsetzfrequenz.

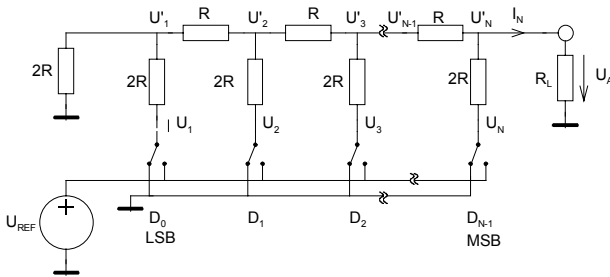


Bild 3-32: DA-Wandler mit inversem R-2R Netzwerk.

Für das mit R_L belastete inverse Leiternetzwerk zur Umsetzung der Zahl Z im Bereich $[0, Z_{max}]$ gilt:

$$U_A = U_{REF} \frac{R_L}{R + R_L} \frac{Z}{Z_{max} + 1} \quad (3-12)$$

Die Berechnung der Ausgangsspannung kann durch Superposition erfolgen. Man setzt alle ausser der eingespiessenen Spannung U_i gleich Null und addiert die einzelnen Anteile. Wir betrachten hierzu stellvertretend einen 3-Bit Wandler:

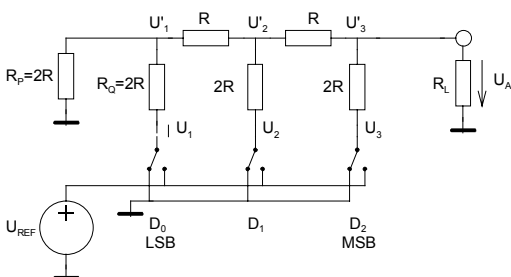


Bild 3-33: Inverses R-2R Netzwerk eines 3-Bit DA-Wandlers als Grundlage zur Analyse nach dem Superpositionsprinzip.

Der von D_0 eingespiessene Anteil wird:

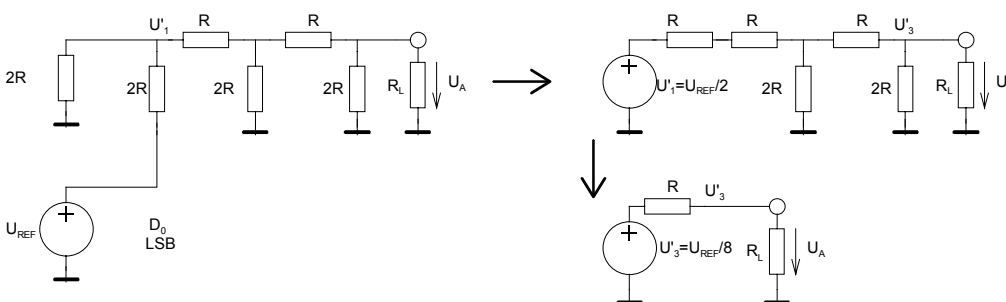


Bild 3-34: Entwicklung des Stromanteils von D_0 aus Bild 3-33.

$$U_{A1} = \frac{U_{REF}}{8} \frac{R_L}{R + R_L}$$

Analog werden die Anteile für D_1 und D_2 :

$$U_{A2} = \frac{U_{REF}}{4} \frac{R_L}{R + R_L} \qquad U_{A3} = \frac{U_{REF}}{2} \frac{R_L}{R + R_L}$$

Die Ausgangsspannung wird die Summe aller Spannungsteile. Unter der Vorgabe, dass die Schalterstellungen für D_0, D_2 jeweils durch Binärwerte 1/0 verkörpert werden, gilt:

$$U_A = U_{A1} + U_{A2} + U_{A3} = U_{REF} \frac{R_L}{R + R_L} \left(\frac{D_0}{8} + \frac{D_1}{4} + \frac{D_2}{2} \right)$$

3.2.8 DA-Wandler in Bipolar-Technologie

Mit Bipolar-Transistoren lassen sich einfach präzise Stromquellen realisieren. So wird ein Wandler nach dem Prinzip der geschalteten Stromquellen:

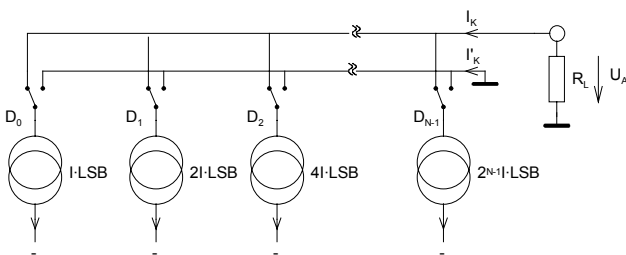


Bild 3-35: DA-Wandler mit geschalteten Stromquellen.

Für die Stromquellen wird eine Stromquellenbank mit normalen Bipolar-Transistoren verwendet. Die Schaltung erfolgt durch die einzelnen Kollektorströme. Um unvermeidliche Toleranzeinflüsse abzumildern, werden die Ströme nicht direkt zusammengeführt sondern über ein Leiternetzwerk zur Stromteilung erzeugt. Die Temperaturabhängigkeit wird verbessert indem man alle Transistoren mit dem gleichen Kollektorstrom speist. Dabei werden so viele Transistoren parallel geschaltet das durch jeden nur I_{LSB} fließt. In ICs werden für die höheren Ströme grösserflächige Transistoren eingesetzt.

In der Stromquellenbank liegen alle Transistoren auf dem gleichen Basispotential. T_1 ist der

Referenztransistor. In ihm fließt $I_{REF} = \frac{U_{REF}}{R_{REF}} = 2^{N-1} I_{LSB}$:

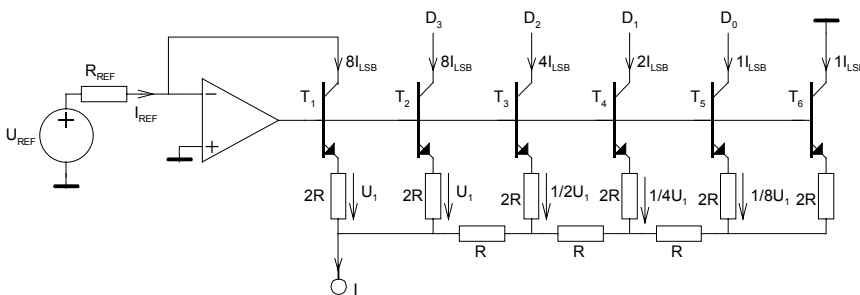


Bild 3-36: Gebräuchliche Prinzipschaltung eines 4-Bit DA-Wandlers mit geschalteten Stromquellen in Bipolar-Technologie.

Der Abschlusswiderstand mit Grösse $2R$ muss auf Emittorpotenzial liegen und darf nicht direkt an Masse gelegt werden. Dies wird mit Transistor T_6 erreicht.

3.2.9 Vorzeichenbehaftete DA-Wandlung

Hierbei werden vorzeichenbehaftete Binärwerte gewandelt, die bei negativem Wert eine negative Ausgangsspannung erzeugen. Wir betrachten die Umsetzung anhand eines Beispiels mit einem 8-Bit Wandler in Anlehnung an [TIE99], S1033.

Üblicherweise liegen die Binärwerte in Zweierkomplementdarstellung vor. Zur Wandlung verschiebt man den Zahlenbereich von $[-128,+127]$ durch Addition von 128 in den Bereich $[0,255]$. Die Addition erfolgt durch Negation des höchstwertigen Bits D_7 . Zahlen über 128 sind demnach positive Werte. Diese Darstellung nennt man Offset-Dualdarstellung. Die Addition des Offsets wird im Analogteil wieder rückgängig gemacht, indem die halbe Referenzspannung mit IC2 subtrahiert wird.

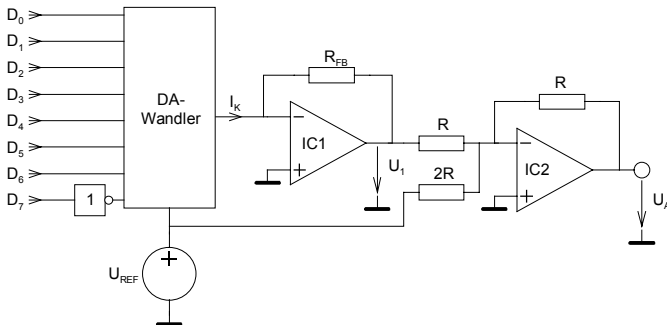


Bild 3-37: DA-Wandler mit bipolarem Ausgang nach [TIE99], S.1033

Die Ausgangsspannung wird für den 8-Bit Wandler:

$$U_A = -U_1 - \frac{1}{2}U_{REF} = U_{REF} \frac{Z + 128}{256} - \frac{1}{2}U_{REF} = U_{REF} \frac{Z}{256}$$

3.2.10 Multiplizierende DA-Wandler

Die meisten bisher betrachteten DA-Wandler liefern eine Ausgangsspannung die proportional zum Produkt einer Binärzahl mit der Referenzspannung ist. Ist die Referenzspannung variabel spricht man von multiplizierenden DA-Wandlern.

Bei Bipolar-Wandlern sind nur positive Referenzspannungen erlaubt, da sonst die Stromquellen sperren würden. Bei CMOS-Wandler sind hingegen positive und negative Referenzspannungen zulässig. Diese Wandler erlauben eine vorzeichenrichtige Umsetzung von positiven und negativen Werten (Vier-Quadranten Multiplikation).

3.2.11 Dividierende DA-Wandler

Durch geeignete Beschaltung kann ein Multiplizierender DA-Wandler auch so betrieben werden, dass die Eingangsspannung U_E durch die Binärzahl Z dividiert wird.

Mit dieser Schaltung hat man die einfache Möglichkeit eine analoge Division (mit Logarithmierer und Exponentialverstärker) oder digitale Division zu umgehen. Diese wären schaltungstechnisch immer wesentlich aufwändiger.

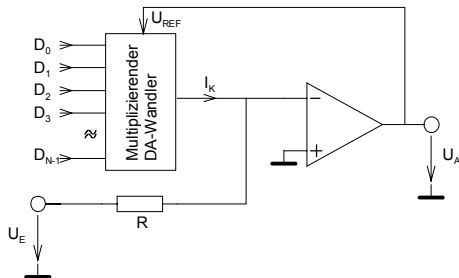


Bild 3-38: Dividierender DA-Wandler nach [TIE99], S.1036

In der Gegenkopplungsschleife stellt sich Referenzspannung U_{REF} so ein, dass $I_K = \frac{-U_E}{R}$. Dann wird

$$I_K = \frac{U_{REF}}{R} \frac{Z_{max} + 1}{Z}.$$

Für die Ausgangsspannung gilt $U_A = U_{REF}$. Daher wird U_A :

$$U_A = U_{REF} = I_K R \frac{Z_{max} + 1}{Z} = -U_E \frac{Z_{max} + 1}{Z}$$

:

4 Digitale Signalverarbeitung

Ziel des Kapitels ist es das Wissen zu vermitteln, wie die bekannten analogen Filterstrukturen digital in DSP-Systeme implementiert werden können.

Aus den verschiedenen Teilgebieten der digitalen Signalverarbeitung wird nachfolgend schwerpunktmässig die Thematik der digitalen Filterung behandelt. Für weiterführende Betrachtungen und andere Teilbereiche wird auf die zahlreiche Literatur verwiesen.

Für die nachfolgenden Kapitel wird komplexe Rechnung, DFT und FFT sowie die Grundlagen der Programmiersprache C und Assembler vorausgesetzt.

4.1 DSP Systeme

Ein einfaches digitales Signalverarbeitungssystem besteht aus den Funktionsblöcken:

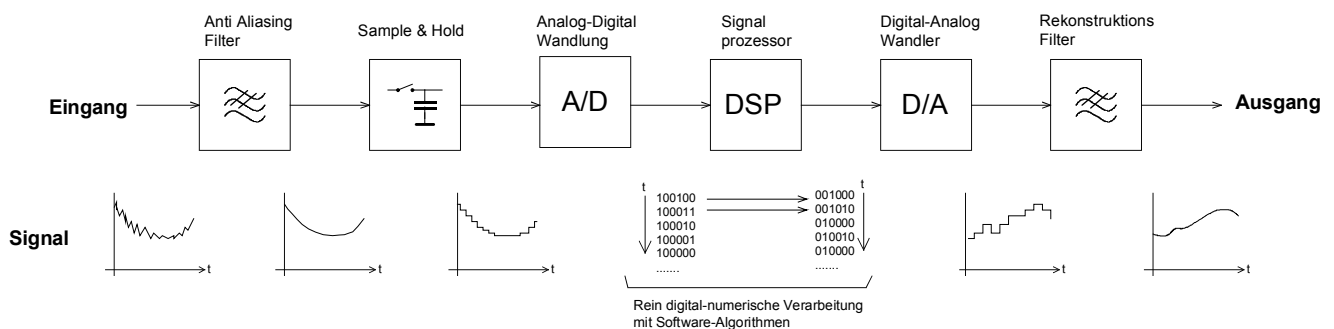


Bild 4-1:
Funktionsblöcke und Signalverlauf bei einem typischen DSP-System.

Bei der digitalen Signalverarbeitung werden die analogen Signale digitalisiert, mit einem Signalprozessor numerisch bearbeitet und bei Bedarf wieder in ein analoges Signal zurück gewandelt. Während für einfache Signalverarbeitung der Aufwand übertrieben erscheint, macht er schon für einfache Aufgaben (wie. z.B. Kalibrierung) Sinn.

Mit DSP-Systemen lassen sich viele Aufgaben problemlos realisieren, die mit analoger Technik nur schwierig beherrschbar sind, z.B.:

- Langzeitspeicherung von Signalen, Messwerten,
- Umfangreichere, präzise mathematische Rechnungen
- Sichere und verlustfreie Übertragung von Signalen
- Flexibles System, Änderungen meist per Software möglich

Typische Beispiele für Aufgaben wo digitale Signalverarbeitung eingesetzt wird:

- Filterung
- Faltung (Mischung zweier Signale)
- Korrelation (Vergleich zweier Signale)
- Gleichrichtung, Mittelwert- und Effektivwertbildung
- Lineare und nicht lineare Verstärkung
- Transformation (z.B. FFT)

Für digitale Filter ergeben sich, verglichen mit Analogfilter, weitere Vorteile:

- Kein Abgleich notwendig. Kein Einfluss von Alterung, Bauelementetoleranzen, Temperaturänderung
- Hohe Zuverlässigkeit, vollständig reproduzierbar
- Relativ unempfindlich gegen Störungen. Rauschen meist kein Problem
- Realisierung von Filtern, die in analoger Technik nicht oder nur sehr schwer zu realisieren sind:
 - Exakt linearphasige Filter
 - Extrem schmalbandige Filter
 - Filter mit sehr steilen Flanken
 - Filter für sehr niedrige Frequenzen
- Verschiedene Filtercharakteristiken in der gleichen Filterschaltung möglich
- Filtercharakteristik einfach veränderbar, auch adaptive Filter möglich

Man beachte, dass analoge Schaltungen durchaus gewisse Vorzüge aufweisen können. Zu den Nachteilen eines DSP Systems kann man sicherlich aufzählen:

- Hoher Initialaufwand
- Niedrige obere Frequenzgrenze des zu bearbeitenden Signals (< 1MHz)
- Störstrahlung des DSP

4.2 Signale

Für die digitale Signalverarbeitung ist es notwendig die Signale, welche bearbeitet werden sollen, in ihren Eigenschaften zu ordnen. Signale werden in zwei grobe Gruppen aufgeteilt:

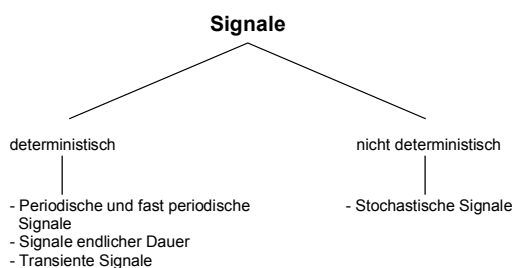


Bild 4-2:
 Einteilung der Signale.

Periodische Signale

Periodische Signale haben eine endliche Leistung aber die Energie ist unendlich im Zeitintervall $[0, \infty)$. Für periodische Signale gilt: $x(t) = x(t + nT_0)$, wobei T_0 die Periodendauer und n eine ganze Zahl ist.

Wegen der endlichen Leistung genügt das Signal der Forderung der absoluten Integrierbarkeit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$$

kann aber nicht Fourier-Transformiert werden.

Beispiele sind Sinus-, Dreieck-Signal, etc., auch zusammengesetzte Signale.

```
t := linrange(0, 4, 200) s      ii := 0.. letzte(t)
f := 1Hz                       ω := 2πf
x := sin(ω · t) + sin(2ω · t)
```

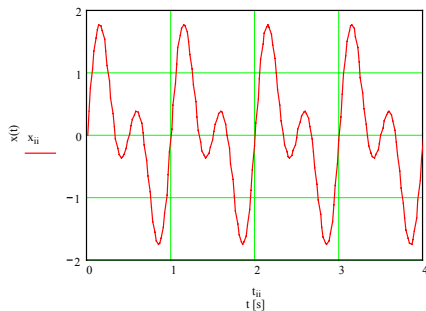


Bild 4-3:
 Beispiel für periodisches Signal:
 $x(t) = \sin(\alpha t) + \sin(2\alpha t)$.

Signale endlicher Dauer

Sie besitzen eine endliche Energie und werden daher als Energie-Signale bezeichnet. Ihre Leistung ist im Zeitintervall $[0, \infty)$ verschwindend.

Beispiel: Einzelne Impulse, z.B. Rechteck-Impuls oder andere endliche Pulsfolge.

```
t := linrange(0, 4, 1000) s      ii := 0.. letzte(t)
f := 1Hz                       ω := 2πf
s(t) :=  $\begin{cases} \frac{4}{\pi} \left[ \sum_{i=0}^{20} \frac{1}{(2 \cdot i + 1)} \cdot \sin[(2 \cdot i + 1) \cdot \omega \cdot t] \right] & \text{if } t \geq 0 \wedge t \leq 2.2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ 
x_ii := s(t_ii)
```

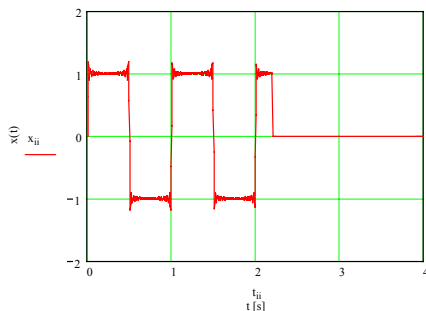


Bild 4-4:
 Beispiel für Signal endlicher Dauer,
 hier eine endliche Pulsfolge.

Transiente Signale

Sie verkörpern eine vorübergehende Auslenkung von einem konstanten Wert.

Beispiel: Störimpulse

```
t := linrange(0, 4, 1000) s      ii := 0.. letzte(t)
f := 1Hz                       ω := 2πf      u_1 := 1V      t_1 := 0.4s      t_2 := 2.2s
s(t) :=  $\begin{cases} u_1 & \text{if } t < t_1 \\ \left( u_1 + e^{-\frac{t-t_1}{1s}} \cdot 5 \cdot \sin(5\omega \cdot t) \right) & \text{if } t \geq t_1 \wedge t < t_2 \\ u_1 & \text{otherwise} \end{cases}$ 
x_ii := s(t_ii)
```

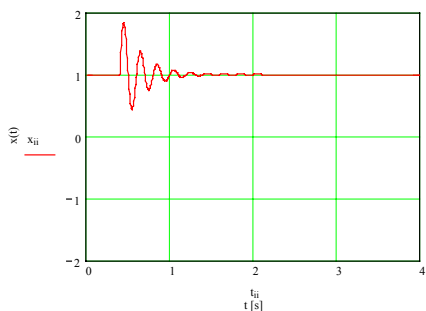


Bild 4-5:
 Beispiel für ein transientes Signal in
 Form einer überlagerten gedämpften
 Schwingung.

Stochastische Signale

Diese Klasse verkörpert die in der Realität auftretenden Signale. Sie sind mehr oder weniger stark mit zufälligen Grössen behaftet. Darunter fallen alle elektrischen Signale die mit Störuschen und anderen nicht deterministischen Störimpulsen überlagert sind. Die Signalbeschreibung erfolgt mit statistischen Wahrscheinlichkeitsgrössen.

Viele stochastische Vorgänge haben die Eigenschaft, dass im Einzelnen keine Gesetzmässigkeit erkennbar ist, gesamthaft aber hinsichtlich der Zeit nichts ändert, z.B. beim thermischem Rauschen.

Beispiele: Rauschspannung an Widerständen und Halbleitern.

```
t := linrange(0, 4, 200) s      ii := 0.. letzte(t)
s(t) := rnd(2) - 1
xi := s(ti)
```

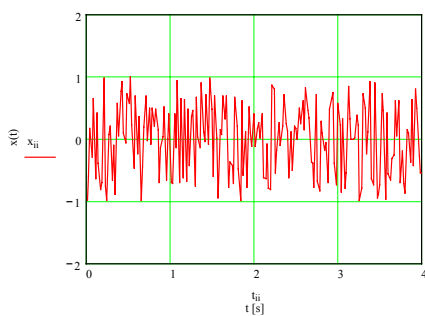


Bild 4-6:
 Beispiel für ein rein stochastisches Signal in Form eines gleichverteilten (weissen) Rauschens.

Kausales Signal

Ein Signal nennt man Kausal wenn $x(t) = 0$ für $t < 0$.

Kontinuierlich – Diskret

Sind Signale in ihrem Zeit- und Amplitudenverhalten kontinuierlich, werden sie als analoge oder zeit- und wertkontinuierliche Signale bezeichnet. Bei einer Abtastung erfolgt eine zeitliche Diskretisierung, bei Quantisierung erfolgt eine wertmässige Diskretisierung.

Die Signale können daher bezüglich dieser Merkmale in 4 Gruppen aufgeteilt werden:

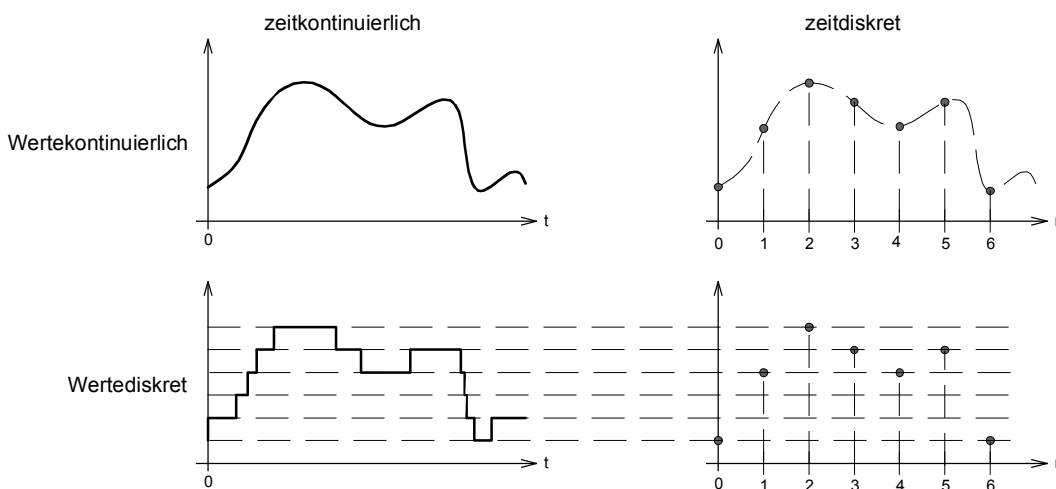


Bild 4-7:
 Signalzuordnung in vier Klassen anhand der Kriterien Zeit/Wert-kontinuierlich/diskret.

4.3 LTI Systeme

LTI-Systeme sind lineare zeitinvariante Systeme (Linear Time Invariant System) und genügen den folgenden Definitionen:

Linearität:

$$x(n) = k_1 x_1(n) + k_2 x_2(n) \quad \Rightarrow \quad y(n) = k_1 y_1(n) + k_2 y_2(n) \quad (4-1)$$

Zeitinvarianz:

$$x(n+k) \quad \Rightarrow \quad y(n+k) \quad (4-2)$$

Bei diskreten LTI Systemen kann die Beziehung zwischen Eingangssignal $x(n)$ und Ausgangssignal $y(n)$ mit einer Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden.

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^M b_i y(n-i) \quad (4-3)$$

N verkörpert die Ordnung des Systems, analog der Ordnung der Differenzgleichung bei einem kontinuierlichen System.

Der Signalfuss in diskreten Systemen wird mit Hilfe von Signalfussgraphen dargestellt. Für diskrete Systeme benutzt man die Funktionsblöcke:

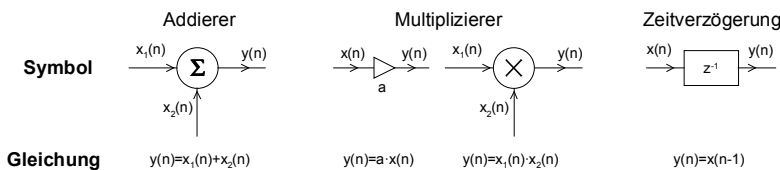


Bild 4-8:
 Funktionsblöcke für diskrete Systeme.

Diskrete LTI-Systeme können daher aus drei Grundelementen: Addierer, Multiplizierer mit Konstante und Zeitverzögerung um eine Abtastperiode zusammengesetzt werden:

Beispiel 4-1: Mittelwertrechnung mit nicht-LTI-System

Der Mittelwert ist definiert $y(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x(k)$ und soll als System mit den Funktionsblöcken nach Bild 4-8 realisiert werden. (Nach DSP-Kurs EE4773, Mississippi State University, 1996)

Lösung:

Durch Umformung erhält man die für die Realisierung benötigte Differenzgleichung:

$$(n+1) \cdot y(n) = x(n) + \sum_{k=0}^{n-1} x(k) = n \cdot y(n-1) + x(n)$$

$$y(n) = \frac{n}{n+1} y(n-1) + \frac{1}{n+1} x(n)$$

Das System kann mit der Anordnung der Funktionsblöcke realisiert werden:

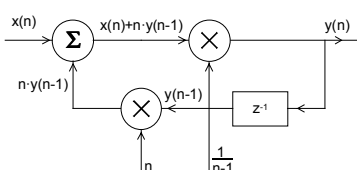


Bild 4-9:
 Mittelwertrechner als System realisiert gemäss Beispiel 4-1. (Kein LTI-System)

Kausalität

Ein System ist kausal, wenn das Ausgangssignal zum Zeitpunkt t_0 unabhängig von Werten des Eingangssignales zu Zeiten $t > t_0$ ist. (Wirkung kann nicht vor der Ursache eintreten)

Stabilität

Ein System ist stabil, wenn jedes beliebige Eingangssignal $x(t)$ mit einer endlichen Amplitude ein Ausgangssignal $y(t)$ mit einer endlichen Amplitude erzeugt. Man nennt dies BIBO-Stabilität (Bounded Input-Bounded Output).

Eine hinreichende und notwendige Bedingung ist, wenn die Impulsantwort $h(n)$ eines diskreten Systems absolut summierbar ist:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty \quad (4-4)$$

(Die Impulsantwort ist das Ausgangssignal eines Systems dem am Eingang ein Dirac-Puls angelegt wird.) Gl. (4-4) impliziert, dass die Impulsantwort nach Null geht wenn N gegen Unendlich läuft, d.h. verschwindend ist.

Beispiel 4-2: Stabilität eines diskreten LTI Systems

Ein diskretes System hat die Impulsantwort $h(n) = a^n \cdot u(n)$. Ist es stabil nach (4-4)?

Lösung:

Man berechnet die absolute Summe. Es ist eine geometrische Reihe und man findet mit der Summenformel, dass sie für $a < \pm 1$ konvergiert:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n \cdot u(n)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a^n| = 1 + |a| + |a|^2 + \dots = \frac{1}{1 - |a|}$$

4.3.1 Zusammenfassung Signale und LTI-Systeme:

(Alle $n, k \in \mathbb{Z}$)

Signale:

Zeitkontinuierliches Signal: $x(t) = f(t)$ Bsp: $x(t) = 12 \cos(2\pi \cdot 1000 \cdot t)$

Zeitdiskretes Signal: $x(t) = f\left(\frac{n}{f_s}\right)$ Bsp: $x(t) = 12 \cos\left(2\pi \cdot 1000 \frac{n}{f_s}\right)$

Eigenschaften und Operationen:

Periodisches Signal: $x(n + N) = x(n)$

Symmetrie (gerade Fkt.): $x(-n) = x(n)$

Antisymmetrie (ungerade Fkt.): $x(-n) = -x(n)$

Verzögerung (Translation): $y(n) = x(n - k)$

Amplitudenskalierung: $y(n) = a \cdot x(n)$

Linearkombination: $y(n) = a \cdot x_1(n) + b \cdot x_2(n)$

Multiplikation: $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$

Zeitskalierung: $y(n) = x(a \cdot n)$

Diskrete Faltung: $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n - k)$

Akkumulierung (Integration): $y(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)$

Elementare diskrete Signale:

Einheitsstoss: $\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$

Einheitssprung: $u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

Einheitsrampe: $ur(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

Beschreibungsgrößen für Signale:

Energie des diskreten Signals: $E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$

Mittelwert der Leistung: $P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$

Endliche Energie: $E_N = \sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2$

Systembeschreibungen:

Zeitinvariant: $x(n - k) \Rightarrow y(n - k)$

Linearität: $H(a_1 \cdot x_1(n) + a_2 \cdot x_2(n)) = a_1 \cdot H(x_1(n)) + a_2 \cdot H(x_2(n))$

Kausalität: $y(n) = f(x(n), x(n - 1), x(n - 2), \dots)$

4.4 Digitale Filter

Digitale Filter werden in grob in zwei Gruppen unterteilt:

FIR-Filter: Nicht rekursive Filter mit einer endlichen Impulsantwort

IIR-Filter: Rekursive Filter mit einer (theoretisch) unendlichen langen Impulsantwort

Beide Filtertypen haben in der Praxis ihre Vorzüge. FIR-Filter sind immer stabil, haben aber immer eine höhere Ordnung als vergleichbare IIR-Filter und sind in der Synthese aufwändiger. Ebenso können mit FIR-Filtern Eigenschaften erreicht werden, die mit IIR-Filtern nicht möglich sind, z.B. exakt linearphasige Filter, Hilbert-Transformator.

IIR-Filter haben im Vergleich eine kleinere Ordnung, sind daher einfacher und effizienter. Sie stellen aber hohe Anforderung an die Präzision der Koeffizienten und Berechnung und können instabiles Verhalten zeigen.

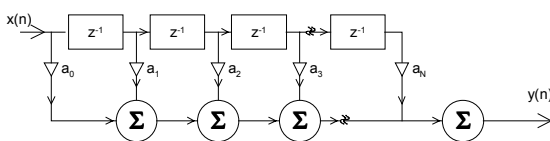
Eine vergleichende Tabellarische Zusammenstellung der Eigenschaften nach [TIE99], S. 1185:

Merkmal	FIR-Filter	IIR-Filter
Selektivität	Gering	Hoch
Erforderliche Filterordnung	hoch	niedrig
Anzahl MAC-Operationen	viele	wenige
Speicherbedarf	hoch	gering
Lineare Phase	problemlos	kaum möglich
Konstante Gruppenlaufzeit	problemlos	kaum möglich
Stabilität	unbedingt	bedingt
Erforderliche Wortbreite	mässig	hoch
Erforderliche Koeff. Genauigkeit	mässig	hoch
Grenzyklen	keine	vorhanden
Adaptive Filter	möglich	kaum möglich

4.4.3 FIR-Filter

FIR-Filter, auch Transversalfilter genannt, haben als nicht rekursive Struktur keine Rückkopplung. Am Ausgang des Systems erscheint eine gewichtete Summe der zeitverzögerten Eingangssignale.

FIR-Filter mit gemeinsamem Summierer am Ausgang



FIR-Filter mit verteilten Summierern

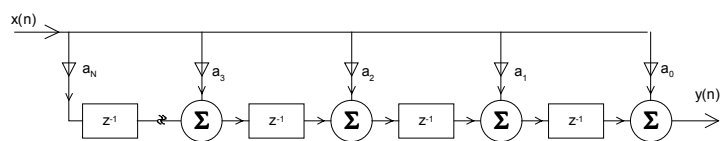


Bild 4-10:
 Blockschaltbild zweier gebräuchlicher FIR-Filter Strukturen.

Die Übertragungsfunktion wird wegen fehlender Rückführung durch Nullsetzen der b_k -Koeffizienten:

$$G(z) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}} \quad \rightarrow \quad b_0=1, \text{Rest } 0 \quad \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = \sum_{k=0}^N a(k) z^{-k} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N} \quad (4-5)$$

Hierbei ist N die Ordnung des Filters, gegeben durch Polynomgrad der Übertragungsfunktion. $N+1$ ist die Länge L des Filters, d.h. Anzahl der Koeffizienten. Dies sieht man durch Erweitern der Gleichung (4-5) mit z^N :

$$G(z) = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_N}{z^N} \quad (4-6)$$

Aus dieser Darstellung der Übertragungsfunktion erkennt man auch, dass alle Pole im Ursprung liegen und das Filter zwangsläufig immer stabil ist. Alle Nullstellen liegen auf dem Einheitskreis. Die Impulsantwort ist endlich und hat die Länge $N+1$.

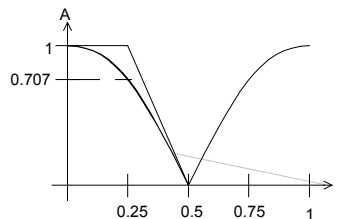
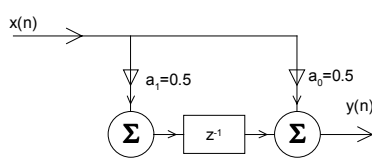
Im Zeitbereich wird das Ausgangssignal durch die gewichtete Summe der zeitverzögerten Eingangssignale bestimmt.

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot x(n-k) \quad (4-7)$$

Diese Differenzgleichung lässt sich problemlos in Rechner implementieren

Beispiel 4-3 FIR Filter 1. Ordnung nach: (Tiefpass/Integrator)

Man bestimme aus dem FIR-Filter 1. Ordnung die DC-Dämpfung und die Dämpfung bei der halben Abtastfrequenz. Beispiele nach [TIE99], S.1149.



$$G(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1})$$

$$F_g = 0.25$$

$$\varphi = -\pi F$$

$$t_{gr} = 0.5T_s$$

Lösung:

Die Dämpfung bei Gleichspannung eines FIR-Filters ist die Summe aller Filterkoeffizienten.

$$A_{DC} = a_0 + a_1 = 0.5 + 0.5 = 1.0$$

Die Dämpfung des FIR-Filters bei der halben Abtastfrequenz ist gleich der im Wechsel mit +1/-1 gewichteten Koeffizientensumme.

Bild 4-11:

FIR-Tiefpass 1. Ordnung für Beispiel 4-3.

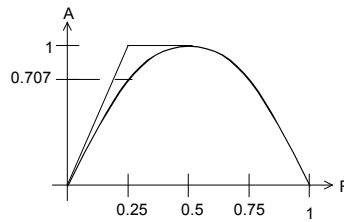
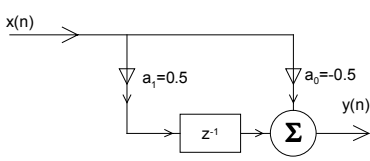
$$A_{\frac{F_s}{2}} = a_0 - a_1 = 0.5 - 0.5 = 0$$

Bemerkung:

Werden alle Koeffizienten mit einem konstanten Faktor multipliziert bleibt die Filtercharakteristik erhalten, es ändert nur die Grundverstärkung.

Beispiel 4-4: FIR-Filter 1. Ordnung (Hochpass/Differenziator)

Man bestimme für das folgende Hochpassfilter 1. Ordnung die DC-Dämpfung und die Dämpfung bei der halben Abtastfrequenz. Beispiel nach [TIE99], S.1150.



$$G(z) = \frac{1}{2}(-1 + z^{-1})$$

$$F_g = 0.25$$

$$\varphi = -\pi(0.5 - F)$$

$$t_{gr} = 0.5T_s$$

Bild 4-12:
FIR-Hochpass 1. Ordnung für Beispiel 4-4.

Lösung:

$$A_{DC} = a_0 + a_1 = -0.5 + 0.5 = 0$$

$$A_{\frac{F_s}{2}} = a_0 - a_1 = -0.5 - 0.5 = -1$$

Beispiel 4-5: FIR-Filter 9. Ordnung

Man ermittle den Amplitudengang und Dämpfungen bei DC und $f_s/2$ des Filters, das durch ein Filtersyntheseprogramm generiert wurde:

Lösung:

30.11.2000
Vorgaben: (Generiert mit QED2000)
 $f_c=0.25, f_H=0.35, f_S=1, N=9$

$$a = \begin{pmatrix} 6.96798563 \cdot 10^{-2} \\ -5.74193001 \cdot 10^{-2} \\ -8.61289501 \cdot 10^{-2} \\ 2.78719544 \cdot 10^{-1} \\ 5.52410960 \cdot 10^{-1} \\ 2.78719544 \cdot 10^{-1} \\ -8.61289501 \cdot 10^{-2} \\ -5.74193001 \cdot 10^{-2} \\ 6.96798563 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$$dB(x) := 20 \cdot \log(x)$$

Berechnungen:

$$N := \text{zeilen}(a)$$

$$N = 9$$

$$A_{DC} := \sum_{k=0}^{N-1} a_k$$

$$A_{DC} = 0.962$$

$$dB(A_{DC}) = -0.335$$

$$A_{FS2} := \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot (-1)^k$$

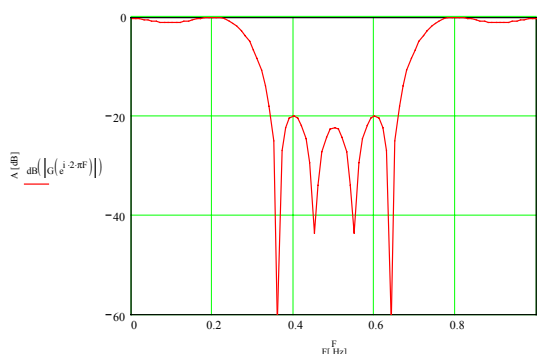
$$A_{FS2} = 0.077$$

$$dB(A_{FS2}) = -22.28$$

$$F := 0.0, 0.01, \dots, 1$$

$$G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot z^{-k}$$

$$f_s := 1$$



```
FIR-Filter 9.Ordnung Beispiel.spw - Editor
Datei Bearbeiten Suchen ?
Filter 1.0
Method: Windowed_Sinc/LowPass_Rectangular
Comment: Created by QED
$
PARAMETERS
sample_freq DOUBLE 1 Sampling Freq
passband_edge DOUBLE 0.25 Passband Edge
stopband_edge DOUBLE 0.35 Stopband Edge
passband_ripple DOUBLE 0.1 Passband Attenuation
stopband_ripple DOUBLE 30 Stopband Attenuation
filter_order DOUBLE 8 Filter Order
$
COEFFICIENTS
Poly filter
9 numerator coefficients (b)
1 denominator coefficient (a)
b[0] = 6.96798563e-002
b[1] = -5.74193001e-002
b[2] = -8.61289501e-002
b[3] = 2.78719544e-001
b[4] = 5.52410960e-001
b[5] = 2.78719544e-001
b[6] = -8.61289501e-002
b[7] = -5.74193001e-002
b[8] = 6.96798563e-002
a[0] = 1.0
$
```

Bild 4-13: FIR-Bandsperre mit 9 Taps.

Fenster: Filterkoeffizienten vom Syntheseprogramm.
 Links: Auswertung des Amplitudenganges.

Beispiel 4-6: Impulsantwort eines FIR Tiefpassfilters

Man bestimme für das Filter in Beispiel 4-3 die Impulsantwort und verifiziere, dass sie $N+1$ Werte lang ist.

Lösung:

i	$x(i)$	$y(i)$
0	1	0.5
1	0	0.5
2	0	0
3

Das Filter hat Ordnung 1, daher ist die Impulsantwort 2 Werte lang.

4.4.4 Synthese der FIR Filterkoeffizienten

In der Praxis erfolgt die Synthese durchwegs mit Syntheseprogrammen. Sie liefern aufwandsminimale Lösungen, d.h. kleinste Filterlängen. Resultat der Synthese ist immer der Filterkoeffizientensatz $a_0 \dots a_N$ nach (4-5), der die Filteranforderungen erfüllt. Alle Methoden zur Koeffizientensynthese sind Näherungsverfahren. Dies zeigt sich auch in mehr oder weniger grossen Abweichungen vom Ideal.

Bei Rechnung mit Fixkomma-Prozessoren müssen die berechneten Filterkoeffizienten vielfach noch etwas nachbearbeitet werden damit sichergestellt ist, dass keine unzulässigen Rechenbereichsüberläufe erfolgen können.

Zur Koeffizientenbestimmung werden zwei grundlegende Methoden verwendet, die nachfolgend beschrieben werden:

- Window-Methoden
- Remez-Exchange

4.4.5 Window-Methode

Sie ist als grundlegende Methode einfach und intuitiv nachvollziehbar. Hierbei werden die Filterkoeffizienten aus der Impulsantwort des zu realisierenden Filters bestimmt. Vom Prinzip her wäre diese Methode exakt, da aber nur endlich viele Werte implementiert werden können, weist dieses Prinzip mehr oder weniger grosse Abweichungen auf, die sich vor allem in der erreichbaren Sperrdämpfung und Flankensteilheit störend äussern.

4.4.6 Grundlagen der Window Methode

Die zu erwartende Impulsantwort ist die Invers-Fouriertransformierte des Frequenzganges $F(j\omega)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \tag{4-8}$$

Beim zeitdiskreten System wird mit der Abtastfrequenz f_s und der Zeit als Vielfache der Abtastperiodendauer $t = nT_s = \frac{n}{f_s}$:

$$y(nT_s) = \int_{-\frac{1}{2}f_s}^{+\frac{1}{2}f_s} F(jf) \cdot e^{j2\pi n f T_s} df \quad (4-9)$$

Die gesuchten Koeffizienten a_k sind nun die Lösung der Gleichung:

$$y(nT_s) = \int_{-\frac{1}{2}f_s}^{+\frac{1}{2}f_s} F(jf) \cdot e^{j2\pi n f T_s} df = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x(n-k) \quad (4-10)$$

Die detaillierte Lösung und weitere Ausführungen sind in [TIE99], S. 1154 nachzulesen.

Durch das Verhalten von Fourierreihen bei Unstetigkeitsstellen immer eine Welligkeit im Durchlass- und Sperrbereich. Sie ist grundsätzlich zu beobachten, wenn mit Fourierreihen eine unstetige Funktion modelliert wird. Die Welligkeit verschwindet auch nicht wenn die Zahl der Koeffizienten erhöht wird, sondern konzentriert sich nur stärker im Bereich der Grenzfrequenz. Dieser Effekt wird *Gibbs-Phänomen* genannt (s. hierzu auch Bild 4-4).

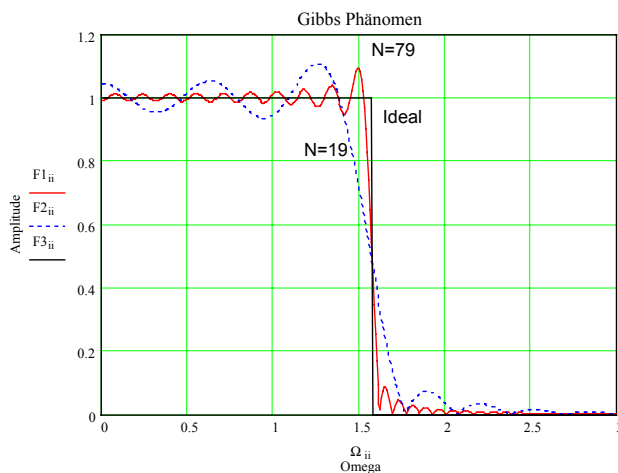


Bild 4-14:
 Näherung des Amplitudenganges mit Filterordnungen $N=19$ und $N=79$ an das Ideal.
 Gut zu beobachten ist das Gibbs-Phänomen, wie die Welligkeit sich bei steigender Ordnung bei Flanke konzentriert.

Abhilfe kann durch geeignete Gewichtung der Filterkoeffizienten erfolgen. Hierbei werden die Randkoeffizienten geeignet reduziert. Allerdings steigt auch die benötigte Filterordnung bei gleicher Flankensteilheit. Daher verkörpern die so bestimmten Filterkoeffizienten nur Rohwerte, die nicht direkt implementiert werden können.

4.4.7 Berechnung der Filterkoeffizienten

Aus der Impulsantwort des Sprunges als ideale Filterfunktion erhalten wir die sinc-Funktion. Für das zu realisierende Filter wird eine endliche Anzahl Werte äquidistant ausgewählt. Diese Werte verkörpern direkt die idealen Filterkoeffizienten:

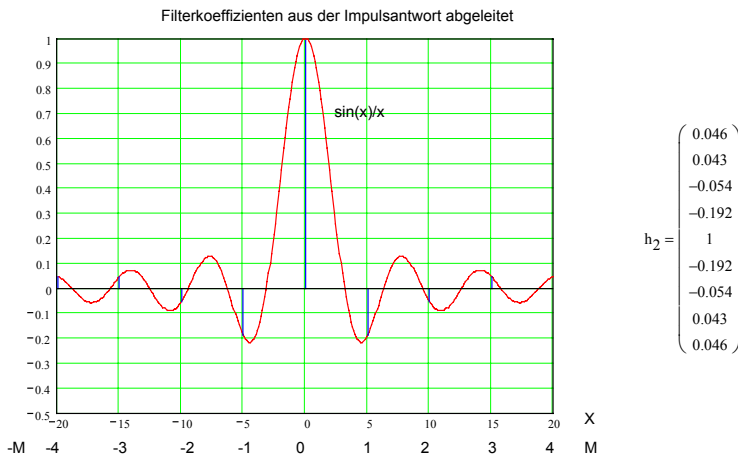


Bild 4-15: Impulsantwort des idealen Filters.

Der Vektor h_2 enthält die nicht kausalen Filterkoeffizienten. Die Filterkoeffizienten des kausalen Systems können durch eine Indexverschiebung bestimmt werden. Der Bereich $[-M, +M]$ wird übergeführt in $[0, 2M]$, wobei $2M$ der Ordnung N des FIR-Filters entspricht.

Die Impulsantwort, d.h. die Filterkoeffizienten für ein FIR-Filter der Länge L werden für die verschiedenen Durchlasscharakteristiken:

Tiefpass:	$h_1(i) = \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} & i = \frac{L-1}{2} \\ \frac{\sin\left(\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\Omega_c\right)}{\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\pi} & \text{sonst} \end{cases}$	$i = \frac{L-1}{2}$	
Hochpass:	$h_1(i) = \begin{cases} \frac{\pi - \Omega_c}{\pi} & i = \frac{L-1}{2} \\ \frac{\sin\left(\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\pi\right) - \sin\left(\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\Omega_c\right)}{\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\pi} & \text{sonst} \end{cases}$	$i = \frac{L-1}{2}$	
Bandpass:	$h_1(i) = \begin{cases} \frac{\Omega_{c2} - \Omega_{c1}}{\pi} & i = \frac{L-1}{2} \\ \frac{\sin\left(\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\Omega_{c2}\right) - \sin\left(\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\Omega_{c1}\right)}{\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\pi} & \text{sonst} \end{cases}$	$i = \frac{L-1}{2}$	
Bandsperre:	$h_1(i) = \begin{cases} \frac{\pi - \Omega_{c2} + \Omega_{c1}}{\pi} & i = \frac{L-1}{2} \\ \frac{\sin\left(\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\pi\right) - \sin\left(\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\Omega_{c2}\right) + \sin\left(\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\Omega_{c1}\right)}{\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\pi} & \text{sonst} \end{cases}$	$i = \frac{L-1}{2}$	

Beispiel 4-7: Berechnung der idealen FIR-Filterkoeffizienten

Man bestimme für ein FIR-Tiefpass mit der Ordnung 20 die idealen Filterkoeffizienten. Die Grenzfrequenz beträgt 100Hz, die Samplefrequenz 1kHz.

Lösung:

Mit (4-11) findet man direkt die Koeffizienten:

Vorgaben :

- $f_S := 1\text{kHz}$ Sampling Frequenz
- $f_C := 100\text{Hz}$ Grenzfrequenz Durchlass
- $N := 20$ Filterordnung

Berechnungen :

$\omega_C := 2\pi \cdot f_C$ $i := 0.. N$
 $L := N + 1$ Anzahl Taps (Ordnung+1)

$\Omega_C := \frac{\omega_C}{f_S}$ $\Omega_C = 0.628$ Normierte Grenzfrequenz des idealen Filters

$$h_{LP}(i, \Omega_C, L) := \begin{cases} \frac{\Omega_C}{\pi} & \text{if } i = \frac{L-1}{2} \\ \frac{\sin\left[\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\Omega_C\right]}{\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\pi} & \text{otherwise} \end{cases}$$

**Ideale Tiefpass
 FIR-Filterkoeffizienten**

$h_i := h_{LP}(i, \Omega_C, L)$

	0
0	0
1	-0.021
2	-0.038
3	-0.043
4	-0.031
5	0
6	0.047
7	0.101
8	0.151
9	0.187
10	0.2
11	0.187
12	0.151
13	0.101
14	0.047
15	0
16	-0.031
17	-0.043
18	-0.038
19	-0.021
20	0

4.4.8 FIR-Filtertypen

FIR-Filter werden anhand der Koeffizientensymmetrie in vier verschiedene Typen mit unterschiedlichen Eigenschaften und Einsatzmöglichkeiten aufgeteilt:

Typ	Eigenschaften	Eignung
1	Ungerade Länge und symmetrische Koeffizienten. Phasenlinear.	LP, HP, BP und BS
2	Gerade Länge und symmetrische Koeffizienten. Phasenlinear	TP, BP
3	Ungerade Länge antisymmetrische Koeffizienten	Hilbert-Transformator
4	Gerade Länge und antisymmetrische Koeffizienten	HP, BS, Hilbert-Transformator

Filter für „gewöhnliche“ Filteranforderungen sind daher meist vom Typ 1, selten Typ 2. Filter mit symmetrischen Filterkoeffizienten sind immer phasenlinear. Sie haben daher konstante Gruppenlaufzeit. Aufgrund der in der Praxis benötigten hohen Filterordnungen haben aber alle FIR-Filter eine relativ lange Durchlaufzeit.

4.4.9 Window-Funktionen

Die nicht idealen Effekte, die aufgrund der endlichen Anzahl Filterkoeffizienten zu beobachten sind, kann durch Benutzung eines Gewichtsfensters gemildert werden. Das Prinzip dabei ist, dass die mittleren Filterkoeffizienten stärker gewichtet werden als die Koeffizienten am Anfang und Ende:

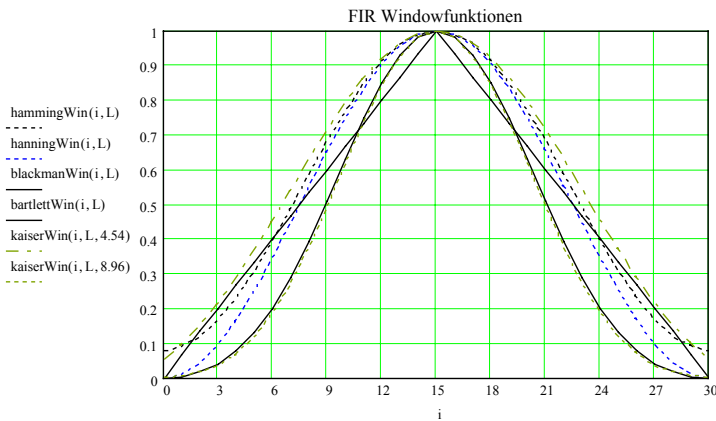


Bild 4-16: Gebräuchliche Window-Funktionen zur Bewertung der idealen Filterkoeffizienten.

Es existieren zahlreiche Fensterfunktionen, die die maximal erreichbare Sperrdämpfung definieren:

Fenster	Sperrdämpfung [dB]	Fensterfunktion $w(i)$	
Rechteck	21	$w(i) = 1$	(4-15)
Bartlett	25	$w(i) = 1 - \frac{2 \left i - \frac{L-1}{2} \right }{N-1}$	(4-16)
Hanning	44	$w(i) = 0.5 + 0.5 \cos \left(\frac{2\pi \cdot \left(i - \frac{L-1}{2} \right)}{N-1} \right)$	(4-17)
Hamming	53	$w(i) = 0.54 + 0.46 \cos \left(\frac{2\pi \cdot \left(i - \frac{L-1}{2} \right)}{N-1} \right)$	(4-18)
Blackman	74	$w(i) = 0.42 + 0.5 \cos \left(\frac{2\pi \cdot \left(i - \frac{L-1}{2} \right)}{L-1} \right) - 0.08 \cos \left(\frac{4\pi \cdot \left(i - \frac{L-1}{2} \right)}{L-1} \right)$	(4-19)
Kaiser ($\gamma=2.12$)	30	$w(i) = \frac{J_0 \left(2\gamma \sqrt{i \cdot (L-i-1)} \right)}{J_0(\gamma)}$	(4-20)
Kaiser ($\gamma=4.54$)	50	dito	
Kaiser ($\gamma=7.76$)	70	dito	
Kaiser ($\gamma=8.96$)	90	dito	

Mit dieser Massnahme wird vor allem das Sperrverhalten verbessert. Im Gegenzug verschlechtert sich aber die Flankensteilheit.

Näherungsweise kann man sagen, dass je stärker die erreichte Sperrdämpfung ansteigt, desto mehr verschlechtert sich die Flankensteilheit bei gleicher Filterordnung. Natürlich kann dann wiederum die Filterordnung erhöht werden um die Flankensteilheit zu verbessern.

Grundsätzlich sind Kaiser-Windows die beste Wahl bezüglich erreichte Flankensteilheit/Filterlänge und erreichte Sperrdämpfung. Zusätzlich existiert für Kaiser-Filter eine heuristische Formel die aus den Sperrforderung die notwendige Filterordnung abschätzt.

Beispiel 4-8: FIR Fensterkoeffizienten bestimmen

Man bestimme für ein FIR-Filter mit 11 Taps die Gewichtskoeffizienten für alle aufgezeigten Fensterfunktionen.

Lösung:

Unter Anwendung der Formeln (4-15)..(4-20) findet man:

Gewichtskoeffizienten für Filterlänge=11 Taps

L := 11

i := 0..L - 1

hammingWin(i, L) =	bartlettWin(i, L) =	blackmanWin(i, L) =	hanningWin(i, L) =
0.08	0	0	0
0.168	0.2	0.04	0.095
0.398	0.4	0.201	0.345
0.682	0.6	0.51	0.655
0.912	0.8	0.849	0.905
1	1	1	1
0.912	0.8	0.849	0.905
0.682	0.6	0.51	0.655
0.398	0.4	0.201	0.345
0.168	0.2	0.04	0.095
0.08	0	0	0

kaiserWin(i, L, 2.12) =	kaiserWin(i, L, 4.54) =	kaiserWin(i, L, 7.76) =	kaiserWin(i, L, 8.93) =
0.403	0.055	2.927·10 ⁻³	9.768·10 ⁻⁴
0.583	0.216	0.059	0.037
0.749	0.455	0.238	0.188
0.883	0.718	0.547	0.496
0.97	0.922	0.864	0.844
1	1	1	1
0.97	0.922	0.864	0.844
0.883	0.718	0.547	0.496
0.749	0.455	0.238	0.188
0.583	0.216	0.059	0.037
0.403	0.055	2.927·10 ⁻³	9.768·10 ⁻⁴

Bemerkung:

Man erkennt, dass Bartlett-, Blackman- und Hanning-Fenster den ersten und letzten Koeffizienten immer Null setzen. Grundsätzlich sollte man vermeiden, entstehende Werte mit Null zu multiplizieren, da hier immer etwas verloren geht.

Beispiel 4-9: Kaiser-Filter mit 21 Taps

Man bestimme die Filterkoeffizienten für ein Kaiser-Tiefpass mit 21 Taps. Die Abtastfrequenz beträgt 9.6kHz, die Grenzfrequenz soll 1kHz betragen. Die Sperrdämpfung soll ≥ 50dB betragen.

Lösung:

Man bestimmt zuerst die idealen Filterkoeffizienten aus der Impulsantwort nach (4-11):

Vorgaben :

$f_s := 9.6 \cdot 10^3$ [Hz] Sampling Frequenz
 $f_c := 1 \cdot 10^3$ [Hz] Grenzfrequenz Durchlass
 $L := 21$ Anzahl Taps

Berechnungen :

$\omega_c := 2\pi \cdot f_c$ $i := 0..L-1$
 $\Omega_c := \frac{\omega_c}{f_s}$ $\Omega_c = 0.654$ Normierte Grenzfrequenz des idealen Filters

$$h_{LP}(i, \Omega_c, L) := \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} & \text{if } i = \frac{L-1}{2} \\ \frac{\sin\left[\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\Omega_c\right]}{\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\pi} & \text{otherwise} \end{cases}$$

**Ideale Tiefpass
 FIR-Filterkoeffizienten**

$h_1 := h_{LP}(i, \Omega_c, L)$

$h_1 =$

0	
0	8.238·10 ⁻³
1	-0.014
2	-0.034
3	-0.045
4	-0.038
5	-8.31·10 ⁻³
6	0.04
7	0.098
8	0.154
9	0.194
10	0.208
11	0.194
12	0.154
13	0.098
14	0.04
15	-8.31·10 ⁻³
16	-0.038
17	-0.045
18	-0.034
19	-0.014
20	8.238·10 ⁻³

Ein Sperrdämpfung von ≥ 50 dB erfordert ein Kaiser- γ von 4.54. Man bestimmt mit (4-20) die Gewichtskoeffizienten w und bewertet die idealen Koeffizienten aus h_1 . Wir erhalten das Resultat in h_2 :

$$\text{kaiserWin}(i, L, \gamma) := \frac{10^{\left[2 \cdot \frac{\gamma \cdot \sqrt{i \cdot (L-i-1)}}{L-1}\right]}}{10^{\gamma}}$$

$\gamma := 4.54$

$w_i := \text{kaiserWin}(i, L, \gamma)$

$h_2 := w_i \cdot h_1$

ideale
 Filterkoeffizienten

$h_1 =$

0	
0	8.238·10 ⁻³
1	-0.014
2	-0.034
3	-0.045
4	-0.038
5	-8.31·10 ⁻³
6	0.04
7	0.098
8	0.154
9	0.194
10	0.208
11	0.194
12	0.154
13	0.098
14	0.04
15	-8.31·10 ⁻³
16	-0.038
17	-0.045
18	-0.034
19	-0.014
20	8.238·10 ⁻³

Kaiser $\gamma=4.54$
 Fensterkoeffizienten

$w =$

0	
0	0.055
1	0.124
2	0.216
3	0.329
4	0.455
5	0.588
6	0.718
7	0.832
8	0.922
9	0.98
10	1
11	0.98
12	0.922
13	0.832
14	0.718
15	0.588
16	0.455
17	0.329
18	0.216
19	0.124
20	0.055

Kaiser-gewichtete
 Filterkoeffizienten

$h_2 =$

0	
0	4.55·10 ⁻⁴
1	-1.679·10 ⁻³
2	-7.45·10 ⁻³
3	-0.015
4	-0.017
5	-4.89·10 ⁻³
6	0.029
7	0.082
8	0.142
9	0.19
10	0.208
11	0.19
12	0.142
13	0.082
14	0.029
15	-4.89·10 ⁻³
16	-0.017
17	-0.015
18	-7.45·10 ⁻³
19	-1.679·10 ⁻³
20	4.55·10 ⁻⁴

Eine Kontrollrechnung zeigt den erwarteten Amplitudengang:

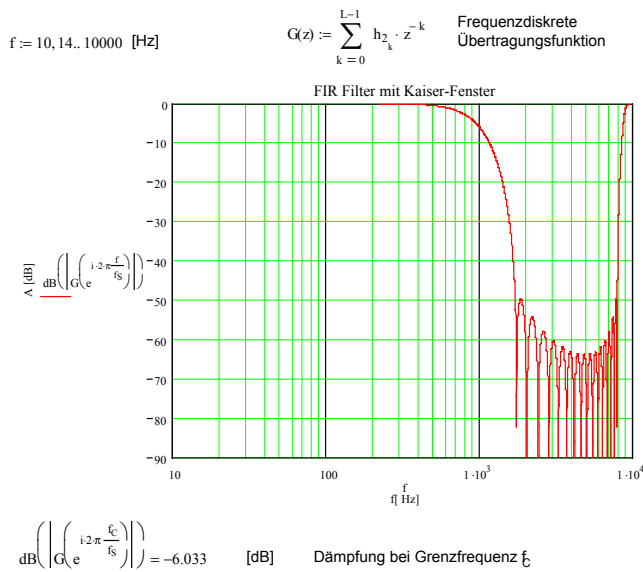


Bild 4-17:
 Berechnung und resultierende Amplitudengang für das Kaiser-Filter nach Beispiel 4-9.

4.4.10 Remez-Exchange Methode (Equiripple-Filter)

Dieses Verfahren, das auch unter den Namen Equiripple-FIR, Parks-McClellan bekannt ist, liefert immer die aufwandminimalsten FIR-Filter. Mit einem Näherungsverfahren werden Filter mit konstanter Welligkeit im Durchlass-, wie auch im Sperrbereich erzeugt.

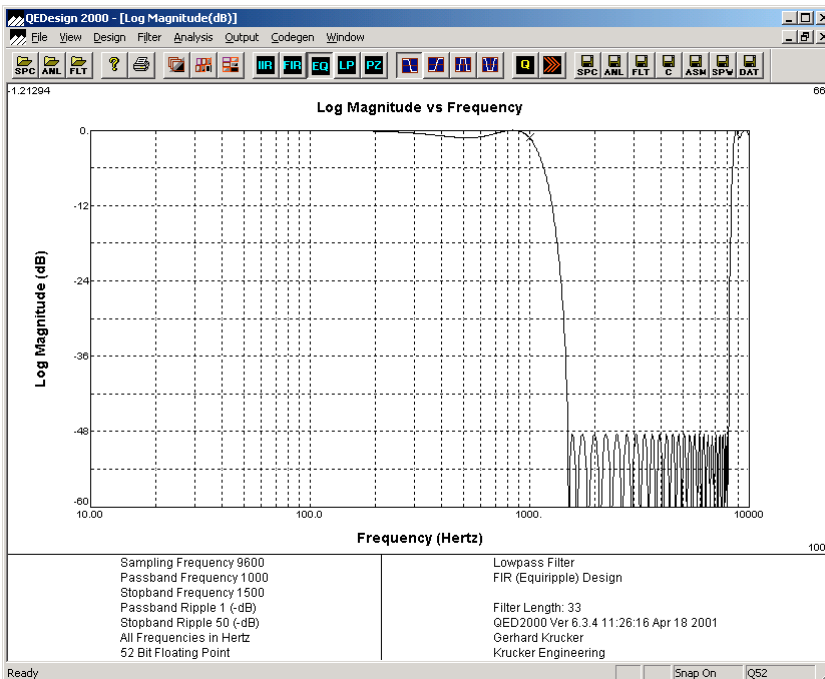


Bild 4-18: Amplitudengang eines Equiripple-Filters mit $L=33$ Taps.

Bei den Filter, die mit Window-Technik berechnet wurden, sieht man im Sperrbereich die nicht konstante Welligkeit, wie z.B. in Bild 4-17. Generell nimmt die Welligkeit bei Window-basierten Filter in der Nähe des Übergangsbereiches, d.h. im Bereich der Flanke, zu.

Es lässt sich überlegen, dass dies keine optimale Lösung im Sinne minimalen Filteraufwandes sein kann, da in bestimmten Bereichen zu stark gefiltert wird. Eine aufwandminimale Lösung würde im Durchlass- und Sperrbereich überall die gleiche definierte Welligkeit aufweisen.

Das Verfahren von Parks-McClellan liefert mit dem Remez-Exchange Algorithmus in einem Iterationsverfahren die Lösung eines Filters mit konstanter Welligkeit (Equiripple-Filter). Nachteil des Verfahrens ist, dass wegen Konvergenzproblemen manchmal eine Lösung nicht gefunden wird. Das Verfahren selbst ist nur numerisch lösbar, für hohe Ordnungen relativ aufwändig, aber gut dokumentiert und frei verfügbar. Es sei hierzu auf die zahlreichen Publikationen verwiesen.

In der Praxis wird man, wenn immer möglich ein Equiripple-Filter verwenden, weil es das einfachste (kürzeste) FIR-Filter ist, das die Filteranforderung erfüllt. Der Entwurf erfolgt mit den zahlreich verfügbaren kommerziellen Filterdesignprogrammen oder mit Matlab.

4.4.11 IIR Filter

IIR-Filter (Infinite Impulse Response Filter) rekursive Filter mit einer (theoretisch) unendlich langen Impulsantwort. Zur Synthese sind vor allem drei Methoden gebräuchlich. Sie sind in Angleichung an die Literatur unter ihrem englischen Namen aufgeführt

1. Impuls Invariant Design
2. Step Invariant Design
3. Bilinear Transform Design
4. Yule-Walker-Algorithmus (numerisch-iterative Methode)

Für die Praxis werden praktisch nur die Methoden 3 und 4 benutzt. Die Bilineare Z-Transformation erlaubt eine direkte Umrechnung der analogen Übertragungsfunktion $G(s)$ in die frequenzdiskrete Übertragungsfunktion $G(z)$. Zu bemerken ist, dass die vier Verfahren nicht genau dieselben Resultate liefern.

Vorteil der IIR-Filter ist die einfachere, kürzere Struktur, verglichen mit einem FIR-Filter bei gleichen Sperrforderungen. Nachteilig ist Empfindlichkeit auf Schwingvorgänge, ausgelöst durch Bereichsüberläufe und die hohen Anforderungen an die Rechengenauigkeit.

4.4.12 Entwurfsprozess

IIR Filter werden praktisch ausschliesslich mit Hilfe der Bilinearen Z-Transformation synthetisiert. Aus der Filteranforderung wird in einem ersten Schritt das analoge Filter, resp. die Übertragungsfunktion bestimmt. Diese wird dann mit der Bilinearen Z-Transformation in die frequenzdiskrete Übertragungsfunktion übergeführt.

Sämtliche dieser Schritte sind einfach und exakt durchzuführen. IIR-Filter sind deshalb bezüglich der Grenzfrequenzen und Welligkeiten exakt, mindestens solange die Koeffizienten- und Rechengenauigkeit gewährleistet ist.

4.4.13 Eigenschaften der IIR-Filter

Das Übertragungsverhalten des IIR-Filter kann durch die frequenzdiskrete Übertragungsfunktion gemäss (4-5) dargestellt werden:

$$G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}} \quad (4-21)$$

Im Regelfall haben das Zähler- und Nennerpolynom denselben Grad, unabhängig vom Typ des Filters.

Die zugehörige Differenzgleichung beschreibt das Verhalten im Zeitbereich:

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M y(n-k) \quad (4-22)$$

Aus Kap. 4.3 wissen wir, das dies ein LTI System verkörpert. Es kann mit den Grundbausteinen Addierer, Multiplizierer und Zeitverzögerung um eine Taktperiode aufgebaut werden.

Man unterscheidet dabei folgende Blockstrukturen:

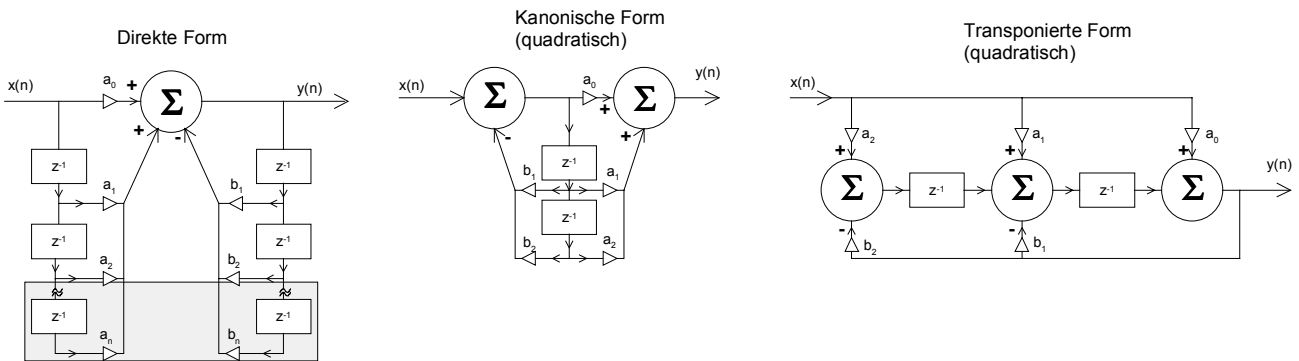


Bild 4-19: Blockstrukturen für IIR-Filter.

Sie unterscheiden sich im Aufwand und der im Betrieb erreichbaren Stabilität. Wie bei aktiven Filter ist es sinnvoll, ja sogar notwendig, eine Übertragungsfunktion höheren Grades in eine Kaskade von Gliedern zweiten Grades aufzuspalten.

4.4.14 Stabilität

Alle Eigenschaften des Systems werden bis auf den konstanten Faktor a_0 durch die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion (4-21) beschrieben. Sie kann nach [Grü99] in Linearfaktoren zerlegt werden und hat dann die Form:

$$G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}} = a_0 z^{M-N} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_M)} \quad (4-23)$$

z_1, \dots, z_N sind die Nullstellen. An diesen Stellen wird der Wert der Übertragungsfunktion Null.
 p_1, \dots, p_M sind die Pole. An diesen Stellen strebt der Wert der Übertragungsfunktion nach Unendlich.

Da die Übertragungsfunktion reelle Koeffizienten hat, können die Pole einfach reell oder konjugiert komplex auftreten. Bei IIR-Filter treten sie praktisch immer konjugiert komplex auf.

Bei einem stabilen digitalen System müssen alle Pole innerhalb des Einheitskreises liegen.
 Begründung: Beim frequenzkontinuierlichen System müssen alle Pole in der linken liegen. Die Z-Transformation legt die gesamte linke $j\omega$ -Halbebene in den Einheitskreis. Es gelten im übertragenen Sinne dieselben Kriterien für Stabilität.

Das am nächsten beim Einheitskreis liegende (komplexe) Polpaar heisst dominanter Pol. Er beeinflusst massgeblich das Einschwingverhalten. Je näher es beim Kreisrand liegt, desto länger dauert der Einschwingvorgang. (Wie beim analogen System)

Beispiel 4-10: Stabilitätsbetrachtung bei einem IIR-Filter

Man beurteile, ob die folgende Übertragungsfunktion eines IIR-Filters ein stabiles System darstellt. Im Falle der Stabilität wäre das dominante Polpaar zu bestimmen.

$$G(z) = \frac{1.562 \cdot 10^{-2} + 3.014 \cdot 10^{-3} z^{-1} - 2.521 \cdot 10^{-2} z^{-2} + 3.014 \cdot 10^{-3} z^{-3} + 1.562 \cdot 10^{-2} z^{-4}}{1 - 3.335z^{-1} + 4.328z^{-2} - 2.565z^{-3} + 0.5845z^{-4}}$$

Lösung:

Die Pole und Nullstellen werden mit Rechnung in MathCad gemäss Bild 4-20. Da alle Pole innerhalb des Einheitskreises liegen (Beträge < 1), ist das Stabilitätskriterium erfüllt. Das Polpaar 0.904±0.372j ist dominant.

Vorgaben:

Zähler-Nennerkoeffizienten

$$a := \begin{pmatrix} 1.562 \cdot 10^{-2} \\ 3.014 \cdot 10^{-3} \\ -2.521 \cdot 10^{-2} \\ 3.014 \cdot 10^{-3} \\ 1.562 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 0.5845 \\ -2.565 \\ 4.328 \\ -3.335 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnungen:

ra := nullstellen(a) ra = $\begin{pmatrix} -1 - 5.802i \times 10^{-3} \\ -1 + 5.802i \times 10^{-3} \\ 0.904 - 0.429i \\ 0.904 + 0.429i \end{pmatrix}$ **Nullstellen**

rb := nullstellen(b) rb = $\begin{pmatrix} 0.763 + 0.17i \\ 0.763 - 0.17i \\ 0.904 - 0.372i \\ 0.904 + 0.372i \end{pmatrix}$ **Pole**
 i := 0..länge(rb) - 1

|rb_i| =

0.782
0.782
0.977
0.977

Dominanter konj. komplexer Pol

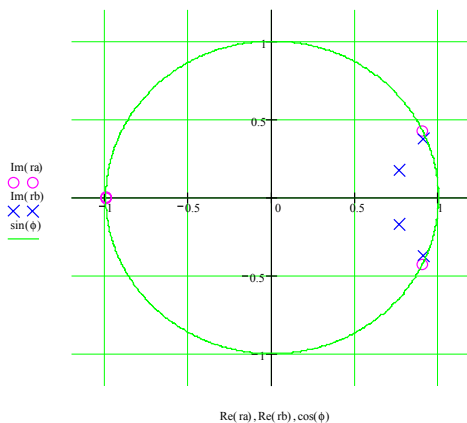


Bild 4-20: Stabilitätsbetrachtung an einem IIR-Filter in Beispiel 4-10. Alle Pole x liegen innerhalb des Einheitskreises. Das Polpaar, das am nächsten zu Kreisrand liegt ist dominant.

4.4.15 Filterkoeffizienten

Der Entwurf von IIR-Filter erfolgt praktisch ausschliesslich mit Bilinearer Z-Transformation. Impuls-Invariant- oder Sprung-Invariant-Methoden ergeben eine schlechte Transformation bei höheren Frequenzen, so dass sie für Hochpass- oder Bandsperrensynthese ungeeignet sind. Vgl hierzu auch [THE95] S. 227-237.

Die Anwendung und elementare Grundlagen der Z-Transformation wurde bereits in Kap. 3 aufgezeigt. Nachfolgend wollen wir etwas detaillierter einige Sachverhalte begründen.

Zuordnung analoge - digitale Frequenzen

Bei der Bilinearen Z-Transformation wird einer analogen Frequenz ω eine digitale Frequenz Ω zugeordnet. Diese Zuordnung erfolgt so, dass der analoge Frequenzbereich $[0, \infty)$ in den digitalen Bereich $[1, \pi)$ abgebildet wird, und zwar so dass die rechte Seite der s-Ebene in den Einheitskreis der z-Ebene fällt. Die Transformationsvorschrift hierzu ist $s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$:

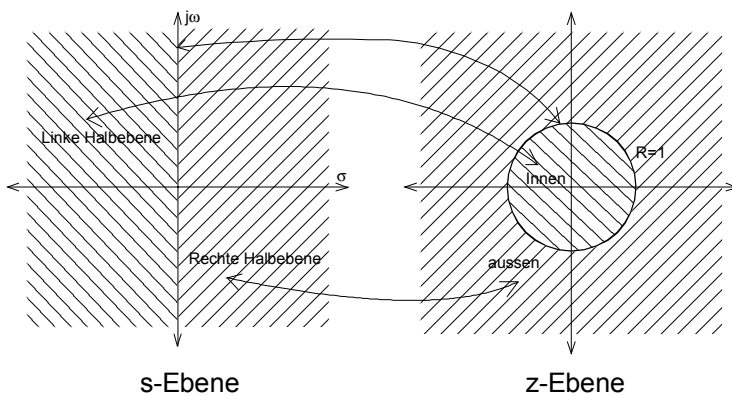


Bild 4-21: Vergleich der s- und z-Ebene bei der Z-Transformation

Wir untersuchen die Zuordnung indem wir z in Euler-Form $z = R \cdot e^{j\Omega}$ schreiben. Ω verkörpert die digitale Frequenz. Somit wird die Transformationsgleichung:

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{R \cdot e^{j\Omega} - 1}{R \cdot e^{j\Omega} + 1} \quad (4-24)$$

Dies kann in kartesische Form gebracht und vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T_s} \frac{R \cdot \cos(\Omega) - 1 + j \cdot R \cdot \sin(\Omega)}{R \cdot \cos(\Omega) + 1 + j \cdot R \cdot \sin(\Omega)} = \frac{2}{T_s} \frac{((R \cdot \cos(\Omega) - 1) + j \cdot R \cdot \sin(\Omega))((R \cdot \cos(\Omega) + 1) - j \cdot R \cdot \sin(\Omega))}{((R \cdot \cos(\Omega) + 1) + j \cdot R \cdot \sin(\Omega))((R \cdot \cos(\Omega) + 1) - j \cdot R \cdot \sin(\Omega))} \\ &= \frac{2}{T_s} \left(\frac{R^2 - 1}{R^2 + 2R \cdot \cos(\Omega) + 1} + j \frac{2R \cdot \sin(\Omega)}{R^2 + 2R \cdot \cos(\Omega) + 1} \right) \end{aligned} \quad (4-25)$$

Die Untersuchung der Zuordnung erfolgt durch Auswerten entlang der imaginären Frequenzachse $j\omega$, d.h. entlang des Kreisrandes mit $R=1$ in der z-Ebene

$$\begin{aligned} j\omega_{ana} &= \frac{2}{T_s} j \frac{2 \cdot \sin(\Omega_{dig})}{2 + 2 \cdot \cos(\Omega_{dig})} = \frac{2}{T_s} j \frac{\sin(\Omega_{dig})}{1 + \cos(\Omega_{dig})} & \Omega_{dig} &: \text{Digitale Kreisfrequenz} \\ \omega_{ana} &= \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\Omega_{dig}}{2}\right) & \omega_{ana} &: \text{Analoge Kreisfrequenz} \end{aligned} \quad (4-26)$$

$$f_{ana} = \frac{f_s}{\pi} \tan\left(\frac{f_{dig} \cdot \pi}{f_s}\right) \quad \Omega_{dig} = \frac{2\pi \cdot f_{dig}}{f_s}$$

Daraus folgt direkt umgekehrte Zuordnung:

$$\Omega_{dig} = 2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{\omega_{ana} T_s}{2}\right) \quad f_{dig} = \frac{f_s}{\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{f_{ana} \cdot \pi}{f_s}\right) \quad \begin{array}{l} \Omega_{dig} : \text{Digitale Kreisfrequenz} \\ \omega_{ana} : \text{Analoge Kreisfrequenz} \end{array} \quad (4-27)$$

Man erkennt, dass die Transformation die Frequenzachse vor allem für höhere Frequenzen stark verzerrt, im Sinne einer Stauchung. Dies wird beim Filterentwurf durch das *Prewarping* berücksichtigt.

Bilineare Transformation für lineare und quadratische Glieder

Liegt aus der Synthese des analogen Prototyps die Übertragungsfunktion in Form quadratischer oder linearer Glieder vor kann die z-Transformation sehr einfach durchgeführt werden. Da die Implementierung von IIR-Filter in ein DSP-System sowieso mit linearen/quadratischen Gliedern erfolgt, genügen für die Praxis die nachfolgenden Zusammenhänge zu Synthese der Filterkoeffizienten.

Dazu wird zuerst die allgemeine z-Transformation mit beliebigen Koeffizienten bestimmt.

Für das lineare Glied $G(s) = \frac{A_0 + A_1 s}{B_0 + B_1 s}$ wird dies:

$$G(z) = \frac{A_0 + A_1 s}{B_0 + B_1 s} \Bigg|_{s=\frac{2z-1}{T_s z+1}} = \frac{A_0 + A_1 \frac{2z-1}{T_s z+1}}{B_0 + B_1 \frac{2z-1}{T_s z+1}} \quad f_s = \frac{1}{T_s}$$

$$G(z) = \frac{A_0 - 2f_s A_1 + z(A_0 + 2f_s A_1)}{B_0 - 2f_s B_1 + z(B_0 + 2f_s B_1)} \quad (4-28)$$

Für das quadratische Glied $G(s) = \frac{A_0 + A_1 s + A_2 s^2}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2}$ wird dies analog:

$$G(z) = \frac{A_0 + A_1 s + A_2 s^2}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2} \Bigg|_{s=\frac{2z-1}{T_s z+1}} = \frac{A_0 + A_1 \frac{2z-1}{T_s z+1} + A_2 \frac{4(z-1)^2}{T_s^2 (z+1)^2}}{B_0 + B_1 \frac{2z-1}{T_s z+1} + B_2 \frac{4(z-1)^2}{T_s^2 (z+1)^2}} \quad f_s = \frac{1}{T_s}$$

$$G(z) = \frac{z^2(A_0 + 2A_1 f_s + 4f_s^2 A_2) + z(2A_0 - 8f_s^2 A_2) + (A_0 - 2A_1 f_s + 4f_s^2 A_2)}{z^2(B_0 + 2B_1 f_s + 4f_s^2 B_2) + z(2B_0 - 8f_s^2 B_2) + (B_0 - 2B_1 f_s + 4f_s^2 B_2)} \quad (4-29)$$

Für die einfache Bestimmung der in DSP benutzten Differenzgleichungen notieren wir negative Potenzen und setzen beim Nennerpolynom b_0 auf 1:

$$G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}} \quad \left(G(s) = \frac{A_0 + A_1 s}{B_0 + B_1 s} \right) \quad (4-30)$$

mit:

$$a_0 = \frac{A_0 + 2f_s A_1}{B_0 + 2f_s B_1} \quad b_1 = \frac{B_0 - 2f_s B_1}{B_0 + 2f_s B_1}$$

$$a_1 = \frac{A_0 - 2f_s A_1}{B_0 + 2f_s B_1}$$

$$G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad \left(G(s) = \frac{A_0 + A_1 s + A_2 s^2}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2} \right) \quad (4-31)$$

mit:

$$a_0 = \frac{A_0 + 2A_1 f_s + 4f_s^2 A_2}{B_0 + 2B_1 f_s + 4f_s^2 B_2} \quad b_1 = \frac{2B_0 - 8f_s^2 B_2}{B_0 + 2B_1 f_s + 4f_s^2 B_2}$$

$$a_1 = \frac{2A_0 - 8f_s^2 A_2}{B_0 + 2B_1 f_s + 4f_s^2 B_2} \quad b_2 = \frac{B_0 - 2B_1 f_s + 4f_s^2 B_2}{B_0 + 2B_1 f_s + 4f_s^2 B_2}$$

$$a_2 = \frac{A_0 - 2A_1 f_s + 4f_s^2 A_2}{B_0 + 2B_1 f_s + 4f_s^2 B_2}$$

Unter Kenntnis dieser Zusammenhänge kann eine Filtersynthese für beliebige IIR-Filter einfach programmiert werden, da der Filterprototyp immer direkt aus den berechneten Polen/Nullstellen als Kaskade quadratischer Glieder und einem linearen Glied formuliert werden kann.

Für den umgekehrten Fall kann aus der frequenzdiskreten Übertragungsfunktion $G(z)$ die frequenzkontinuierliche Übertragungsfunktion $G(s)$ bestimmt werden. Die Herleitung erfolgt analog.

$$G(s) = \frac{A_0 + A_1 \cdot s}{B_0 + B_1 \cdot s} \quad \left(G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{b_0 + b_1 z^{-1}} \right) \quad (4-32)$$

mit:

$$A_0 = 2f_s (a_0 + a_1) \quad B_0 = 2f_s (b_0 + b_1)$$

$$A_1 = a_0 - a_1 \quad B_1 = b_0 - b_1$$

$$G(s) = \frac{A_0 + A_1 \cdot s + A_2 \cdot s^2}{B_0 + B_1 \cdot s + B_2 \cdot s^2} \quad \left(G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \right) \quad (4-33)$$

mit:

$$A_0 = 4f_s^2 (a_0 + a_1 + a_2) \quad B_0 = 4f_s^2 (b_0 + b_1 + b_2)$$

$$A_1 = 4f_s (a_0 - a_2) \quad B_1 = 4f_s (b_0 - b_2)$$

$$A_2 = (a_0 - a_1 + a_2) \quad B_2 = (b_0 - b_1 + b_2)$$

Beispiel 4-11: Z-Transformation einer analogen Übertragungsfunktion $G(s)$ in $G(z)$

Die analoge Übertragungsfunktion eines Butterworth-Hochpassfilters 3. Ordnung mit 1kHz analoger Grenzfrequenz soll in eine digitale Übertragungsfunktion mit Samplefrequenz $f_s=16\text{kHz}$ übergeführt werden:

$$G(s) = \frac{s^3}{s^3 + 12566.4s^2 + 7.89568 \cdot 10^7 s + 2.48050 \cdot 10^{11}}$$

Lösung:

In einem ersten Schritt wird die Funktion in ein quadratisches und lineares Glied aufgespalten:

$$G(s) = \frac{s^2}{s^2 + 6283.19s + 3.94784 \cdot 10^7} \cdot \frac{s}{s + 6283.19}$$

Diese Glieder werden nun nach (4-30),(4-31):

$$G(z) = \frac{a_{10} + a_1 z^{-1}}{1 + b_{11} z^{-1}} \cdot \frac{a_{20} + a_{21} z^{-1} + a_{22} z^{-2}}{b_{20} + b_{21} z^{-1} + b_{22} z^{-2}} \quad \left(G(s) = \frac{A_{10} + A_{11}s}{B_{10} + B_{11}s} \cdot \frac{A_{20} + A_{21}s + A_{22}s^2}{B_{20} + B_{21}s + B_{22}s^2} \right)$$

mit:

$$a_{10} = \frac{A_{10} + 2f_s A_{11}}{B_{10} + 2f_s B_{11}}$$

$$b_{11} = \frac{B_{10} - 2f_s B_{11}}{B_{10} + 2f_s B_{11}}$$

$$a_{11} = \frac{A_{20} - 2f_s A_{21}}{B_{10} + 2f_s B_{11}}$$

$$a_{20} = \frac{A_{20} + 2A_{21}f_s + 4f_s^2 A_{22}}{B_{20} + 2B_{21}f_s + 4f_s^2 B_{22}}$$

$$b_{21} = \frac{2B_{20} - 8f_s^2 B_{22}}{B_{20} + 2B_{21}f_s + 4f_s^2 B_{22}}$$

$$a_{21} = \frac{2A_{20} - 8f_s^2 A_{22}}{B_{20} + 2B_{21}f_s + 4f_s^2 B_{22}}$$

$$b_{22} = \frac{B_{20} - 2B_{21}f_s + 4f_s^2 B_{22}}{B_{20} + 2B_{21}f_s + 4f_s^2 B_{22}}$$

$$a_{22} = \frac{A_{20} - 2A_{21}f_s + 4f_s^2 A_{22}}{B_{20} + 2B_{21}f_s + 4f_s^2 B_{22}}$$

Numerische Lösung wird:

$$G(z) = \frac{0.80978 - 1.61956z^{-1} + 0.80978z^{-2}}{1 - 1.55712z^{-1} + 0.682z^{-2}} \cdot \frac{0.83588 - 0.83588z^{-1}}{1 - 0.67175z^{-1}}$$

Vorgaben:

$$f_S := 16\text{kHz}$$

$$A_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B_2 := \begin{pmatrix} 3.9478410^7 \\ 6283.19 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B_1 := \begin{pmatrix} 6283.19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnungen:

$$a_2 := \begin{pmatrix} A_2 + 2 \cdot A_2 \cdot f_S \cdot s + 4 \cdot f_S^2 \cdot A_2 \cdot s^2 \\ 2 \cdot A_2 - 8 \cdot f_S^2 \cdot A_2 \cdot s^2 \\ A_2 - 2 \cdot A_2 \cdot f_S \cdot s + 4 \cdot f_S^2 \cdot A_2 \cdot s^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{B_2 + 2 \cdot B_2 \cdot f_S \cdot s + 4 \cdot f_S^2 \cdot B_2 \cdot s^2} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0.80978 \\ -1.61956 \\ 0.80978 \end{pmatrix}$$

Quadratisches Glied

$$b_2 := \begin{pmatrix} B_2 + 2 \cdot B_2 \cdot f_S \cdot s + 4 \cdot f_S^2 \cdot B_2 \cdot s^2 \\ 2 \cdot B_2 - 8 \cdot f_S^2 \cdot B_2 \cdot s^2 \\ B_2 - 2 \cdot B_2 \cdot f_S \cdot s + 4 \cdot f_S^2 \cdot B_2 \cdot s^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{B_2 + 2 \cdot B_2 \cdot f_S \cdot s + 4 \cdot f_S^2 \cdot B_2 \cdot s^2} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.55712 \\ 0.682 \end{pmatrix}$$

$$a_1 := \begin{pmatrix} A_1 + 2 \cdot f_S \cdot A_1 \cdot s \\ A_1 - 2 \cdot f_S \cdot A_1 \cdot s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{B_1 + 2 \cdot f_S \cdot B_1 \cdot s} \quad a_1 = \begin{pmatrix} 0.83588 \\ -0.83588 \end{pmatrix}$$

Lineares Glied

$$b_1 := \begin{pmatrix} B_1 + 2 \cdot f_S \cdot B_1 \cdot s \\ B_1 - 2 \cdot f_S \cdot B_1 \cdot s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{B_1 + 2 \cdot f_S \cdot B_1 \cdot s} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.67175 \end{pmatrix}$$

Die Richtigkeit des Resultates kann durch die Kontrolle der Dämpfung bei der Grenzfrequenz kontrolliert werden. Dabei muss aber bereits der Einfluss der Spektrumverzerrung berücksichtigt werden:

Kontrolle der Grenzfrequenz:

$$f_{\text{Cdig}} := 1\text{kHz}$$

Inverses Prewarping:

$$f_{\text{Cana}} := \frac{f_S}{\pi} \cdot \text{atan} \left(\frac{\pi \cdot f_{\text{Cdig}}}{f_S} \right) \quad f_{\text{Cana}} = 987.43827\text{Hz}$$

$$G(z) := \frac{\sum_{i=0}^{\text{letzte}(a_1)} a_1 \cdot z^{-i} \cdot \sum_{i=0}^{\text{letzte}(a_2)} a_2 \cdot z^{-i}}{\sum_{i=0}^{\text{letzte}(b_1)} b_1 \cdot z^{-i} \cdot \sum_{i=0}^{\text{letzte}(b_2)} b_2 \cdot z^{-i}}$$

$$\text{dB} \left(\left| G \left(e^{j 2\pi \frac{f_{\text{Cana}}}{f_S}} \right) \right| \right) = -3.01031$$

Die minimale Abweichung von -3.01dB ist durch beschränkte Koeffizientengenauigkeit in der Aufgabenstellung begründet.

Beispiel 4-12: Bestimmen der analogen Übertragungsfunktion $G(s)$ aus $G(z)$

Man bestimme die frequenzkontinuierliche Übertragungsfunktion $G(s)$ des folgenden digitalen Filters mit einer Samplefrequenz $f_s=16\text{kHz}$.

$$G(z) = \frac{7.839 \cdot 10^{-2} z^2 - 7.839 \cdot 10^{-2}}{z^2 - 1.351z + 0.8439}$$

Lösung:

Grundsätzlich kann man die Definition der inverse Z-Transformation einsetzen und ausrechnen. Einfacher findet man unter Verwendung von (4-33) direkt:

$$G(z) = \frac{7.839 \cdot 10^{-2} z^2 - 7.839 \cdot 10^{-2}}{z^2 - 1.351z + 0.8439} = \frac{7.839 \cdot 10^{-2} - 7.839 \cdot 10^{-2} z^{-2}}{1 - 1.351z^{-1} + 0.8439z^{-2}}$$

und erhält:

$$G(s) = \frac{1.00339 \cdot 10^4 s}{3.1949s^2 + 9.9904 \cdot 10^3 s + 5.0473 \cdot 10^8} = \frac{3.14061 \cdot 10^3 s}{s^2 + 3.12698 \cdot 10^3 s + 1.5798 \cdot 10^8}$$



Digitale Übertragungsfunktion

Die digitale Übertragungsfunktion $G(z)$ beschreibt im Zeit oder Frequenzbereich das Verhalten des digitalen Systems.