

Dr. Lothar Wenzel

Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei

Teil 5: Anwendungen von Fouriertransformationen sowie FIR- und IIR-Filterstrukturen

Dieser Teil der Artikelreihe schließt das aus den Teilen 1 bis 4 bestehende Kapitel „Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung“ ab und zeigt anhand von Demonstrationsbeispielen das praktische Anwendungsspektrum der Fouriertransformationen sowie der FIR- und IIR-Filterstrukturen.

O bwohl bis jetzt noch nicht übermäßig viel an Theorie vorgegeben wurde, besteht doch kein Mangel an Demonstrationsbeispielen. Der Grund dafür liegt in der großen Bedeutung der Fouriertransformation und der digitalen Filter in der Praxis. Diese beiden Spezialdisziplinen, die überdies noch eng miteinander verzahnt sind, decken bereits weite Teile der angewandten Signaltheorie ab. Dieser Artikel behandelt die folgenden vier Beispiele:

- 1) Filter ohne Phase
- 2) Einkopplung in Stromnetze
- 3) Doppler-Effekt
- 4) Währungskurse

Filter ohne Phase

Im dritten und vierten Teil dieser Artikelreihe wurden ausführlich verschiedene digitale Filter vorgestellt. Dabei waren sowohl die sogenannten Filter mit endlicher Antwort (FIR) als auch diejenigen mit unendlicher Antwort (IIR) Gegenstand der Diskussion. Die digitalen Filter arbeiten vollständig im Zeitbereich, die eigentliche Wirkung

wird aber im Frequenzraum angestrebt. Designziel ist demnach eine möglichst genaue Einhaltung vorgegebener Frequenzeigenschaften des Ausgangssignals. Das alles ist von Kompromissen geprägt, da sich ideale Vorstellungen nur annähern lassen, sofern der Aufwand in Grenzen bleiben soll.

Neben dem Frequenzgang, d.h. dem Frequenzverhalten der Filter, wird auch die Phasenlage verändert, was zumeist als unerwünschter Seiteneffekt in Erscheinung tritt. Bild 1 zeigt ein spezielles, als Tiefpaß konzipiertes Butterworth-Filter mit vorgegebener Ordnung und sein Übertragungsverhalten im Frequenz- bzw. Phasenraum. Wie zu

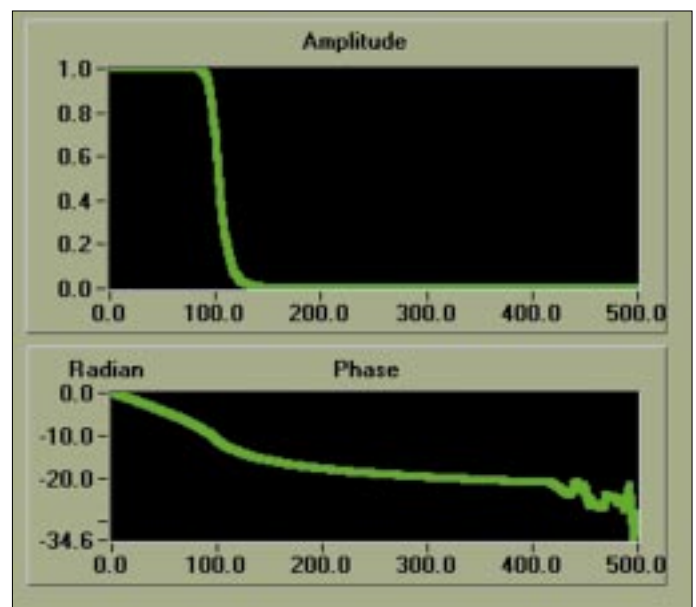


Bild 1. IIR-Filter können den linearen Phasengang nicht aufrecht erhalten. Auf der anderen Seite ist Linearphasigkeit oftmals eine gewünschte Eigenschaft.

sehen, ist der Phasengang nicht optimal. In Abhängigkeit von der Frequenz eines Sinussignals als Eingang für das Butterworth-Filter treten Phasenverschiebungen auf. Bei bestimmten Anwendungen will und kann man diesen Effekt nicht tolerieren. Eine Beseitigung dieses Mißstandes scheint kaum möglich zu sein, da alle vorgestellten IIR-Filter diese charakteristische Eigenschaft in irgendeiner Form

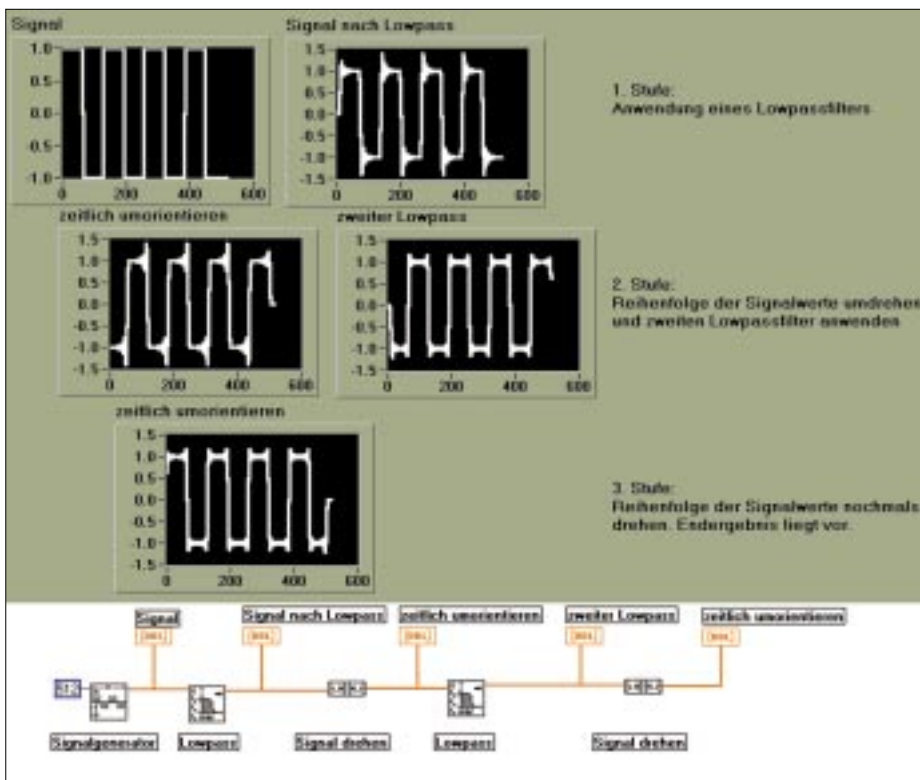


Bild 2. Durch einen Trick läßt sich die lineare Phase auch bei IIR-Filtern produzieren. Allerdings bedarf es dazu spezieller Randbedingungen.

besitzen. Es gibt allerdings eine Situation, bei der dieses Vorhaben gelingt. Man muß dazu aber auf die Echtzeitfähigkeit des digitalen Filters verzichten. Mit anderen Worten, man kann ganze Familien von phasenversatzfreien digitalen Filtern aufbauen, wenn vor dem Start des Filters bereits das gesamte Signal zur Verfügung steht.

Die Grundidee, die hinter diesem generell einsetzbaren Verfahren steckt, läßt sich sehr schnell beschreiben. Man konsultiere hierzu auch die Beschreibungen aus *Bild 2*. Das ganze Geheimnis liegt darin, daß das digitale Filter doppelt über das Datenmaterial läuft, wobei der zweite Durchlauf nicht direkt auf die Resultate der ersten Filterung wirkt, sondern auf das genau umgekehrt gefilterte Signal. Die Wirkungsweise dieses Prinzips läßt sich zumindest heuristisch schnell erläutern. Taucht beim ersten Filterprozeß bei einer bestimmten Frequenz eine definierte Phasenverschiebung auf, so bewirkt die nachfolgende Filterung einen gleichgroßen negativen Phasenversatz. Insgesamt resultiert daraus eine Phasenverschiebung von 0, und zwar vollkommen unabhängig von der Frequenz. Damit führt dieser einfache Trick zu einem idealen Phasenverhalten des Filters. Nach allen Aktionen muß das resultierende Signal selbstverständlich wieder durch Umkehr der Reihenfolge in die korrekte Ordnung gebracht werden.

Interessant ist im Zusammenhang mit dem konstruierten digitalen Filter ohne Phasenverschiebung auch noch der unmittelbare Effekt. Diesem Zweck dient das Programm PHASEAUDIO. Genutzt wird die oben vorgestellte Methodik der zweimaligen Anwendung desselben digitalen Filters, wobei vor dem zweiten Durchlauf das gefilterte Signal invertiert wird. Ganz zuletzt ist das resultierende Signal wieder umzuordnen. PHASEAUDIO bietet die gängigen IIR-Filter zur freien Auswahl an: Butterworth, Bessel, Tschebyscheff 1. Art und 2. Art sowie Elliptische Filter. Bei allen Varianten läßt sich die Ordnung verändern; eine höhere

$|H(s)|^2$. Als erste Konsequenz folgt daraus, daß kein Imaginärteil, d.h. kein Phasenversatz vorliegt. Gleichzeitig besteht aber zwischen dem Frequenzgang des ursprünglich genutzten Filters $|H(s)|$ und dem des neuen $|H(s)|^2$ ein deutlicher Unterschied. Strebt man vollständigen Durchlaß $|H(s)| = 1$ bzw. vollständige Sperrung $|H(s)| = 0$ an, so sind die Werte $|H(s)|$ und $|H(s)|^2$ identisch. Das ist aber die ideale Zielvorstellung. In Wirklichkeit ist man nur in der Nähe dieser Werte.

Ist $|H(s)|$ für eine bestimmte Frequenz z.B. 0,9, so ist $|H(s)|^2 = 0,81$. Aus $|H(s)| = 1,1$ ergibt sich $|H(s)|^2 = 1,21$. Demnach verschlechtert das neue Filter das Verhalten im Durchlaßbereich. Gleichzeitig hat $|H(s)| = 0,1$ die Beziehung $|H(s)|^2 = 0,01$ zur Folge, was einer deutlichen Verbesserung im Sperrbereich gleichkommt. Allerdings ergibt sich hierbei mehr als eine Verdopplung des Rechenaufwands. Wie bereits erwähnt, eignet sich diese Art von Filterkombinationen für Echtzeit-Anwendungen sowieso nicht.

Einkopplung in Stromnetze

Das nächste Problem befaßt sich mit Schwierigkeiten, die bei der Einkopplung neuer Stromlieferanten in bestehende Netze auftreten. Diese Aufgabenstellung tritt auch in Kraftwerken auf, wenn Turbinen nach Stillstand wieder zugeschaltet werden müssen.

Aus Sicht der digitalen Signalverarbeitung ergibt sich daraus ein recht einfach zu formulierendes Problem. Von einem diskret vorliegenden Signal sei bekannt, daß es sinusförmig ist. Die Aufgabe besteht darin, Amplitude, Frequenz und Phase dieser Sinusschwingung so genau wie möglich zu bestimmen. Auf Basis dieses Wissens läßt sich dann ein Abgleich der verschiedenen Quellen vornehmen.

Diese Problemstellung sieht einfach aus, aufgrund sehr hoher Genauigkeitsforderungen liegt aber ein echtes Problem vor. Es sind insbesondere zwei Strategien, die sich auf den ersten Blick als Lösung anbieten. Die erste Methode ist die Berechnung der Fouriertransformation. Idealerweise besteht die Fouriertransformation aus einem einzigen nichtverschwindenden Wert. Diese komplexe Zahl beschreibt dann zusammen mit dem Argument vollständig Amplitude, Frequenz und Phase der unterliegenden Sinusschwingung. Allerdings ist das nur theoretisch ein gangbarer Weg. Die Crux liegt darin, daß die letzte Aussage nur dann richtig ist, wenn das diskutierte Signal passend abgetastet wurde. Die Abtastrate und die Frequenz der Sinusschwingung müssen aufeinander abgestimmt sein. Ist das nicht der Fall, zeigt die Fouriertransformation ein völlig anderes Verhalten. In *Bild 4* ist diese Situation anhand des Leistungsspektrums eines rein sinusförmigen Signals gezeigt. Da die Frequenz der Sinusschwingung nicht mit der Taktrate korrespondiert, zeigen sich im Leistungsspektrum viele von 0 verschiedene Elemente. Eine Spitze im Leistungsspektrum dominiert zwar, jedoch ist die dazugehörige Frequenz nur ein Näherungswert für den eigentlich gesuchten Wert. Insofern kann diese Methodik im Regelfall das Problem nicht mit ausreichender Genauigkeit bewältigen.

Die zweite Lösungs idee beruht auf einem einfachen Fitting-Ansatz. Gegeben sind äquidistante Zeitpunkte t_1, \dots, t_n sowie die dazugehörigen Werte y_1, \dots, y_n der Sinusschwin-

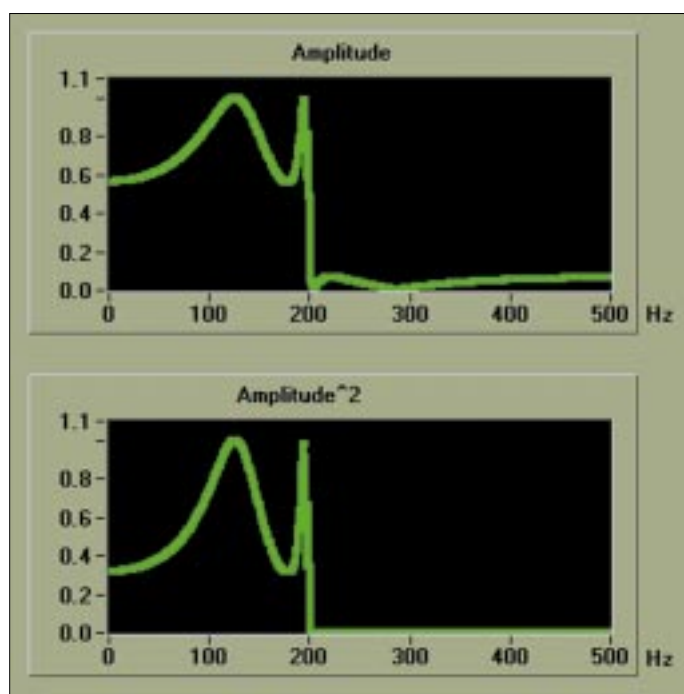


Bild 3. Frequenzverhalten eines Elliptischen Filters (Tiefpaß der Ordnung 10).

Ordnung bedeutet mehr Rechenaufwand, verbessert auf der anderen Seite aber die Qualität des Filters. Die wichtigste Taste ist aber die, die zwischen den klassischen Filtern und den neukonstruierten sowie phasenfreien hin- und herschaltet. Da erstere einen frequenzabhängigen Phasenversatz produzieren, sind Auswirkungen auf das auszugehende Signal vorhanden, die gegebenenfalls auch hörbar sind.

Beide Varianten weisen ein ähnliches, aber nicht identisches Frequenzverhalten auf. Das Verschwinden der Phase wird mit geringfügigen Nachteilen bestraft. *Bild 3* zeigt die frequenzabhängige Amplitude für ein Elliptisches Filter (Tiefpaß 10. Ordnung). Die Phase ist zwar auslöscher, jedoch um den Preis, daß das Designziel eines idealen Tiefpasses schlechter umgesetzt wird. Wie *Bild 3* weiter zeigt, läßt sich dieser Effekt qualitativ sehr gut beschreiben. Ist $H(s)$ die Übertragungsfunktion des ursprünglichen Filters, so ist die konjugiert komplexe Größe $H(s)^*$ die Übertragungsfunktion des zweiten Filters. Die Hintereinanderschaltung beider wird durch das Produkt $H(s) \cdot H(s)^*$ beschrieben. Letzteres ist aber stets eine reelle Zahl, nämlich

gung. Gesucht sind Zahlen a , b und c , so daß die Paare (t_1, y_1) , ..., (t_n, y_n) möglichst genau auf folgender Kurve liegen:

$$y = a \cdot \sin(bt + c)$$

Hierbei entspricht a der Amplitude, b der Frequenz und c der Phase des unbekanntes Sinussignals. Dieser Ansatz ist nicht übermäßig kompliziert, und es gibt Standardverfahren, die basierend auf den Punktepaaren und dem Modell eine Bestimmung der Parameter a , b und c gestatten. Zum Einsatz kommt hierbei die Methode der kleinsten Quadrate. Allerdings sind damit zwei deutliche Nachteile verbunden. Zum einen sind Parameterbestimmungen der beschriebenen Art sehr rechenaufwendig, wobei dieser Aufwand überproportional mit dem Umfang der Datensätze steigt. Außerdem, und das ist noch kritischer, neigen diese Lösungsverfahren zu instabilem Verhalten. Das verbietet fast automatisch einen Einsatz in der Praxis, da Stabilität und Kenntnisse über das Zeitverhalten der eingesetzten Algorithmen unverzichtbare Qualitätsmerkmale sind. Es kommt hinzu, daß das von DSP-Chips beherrschte

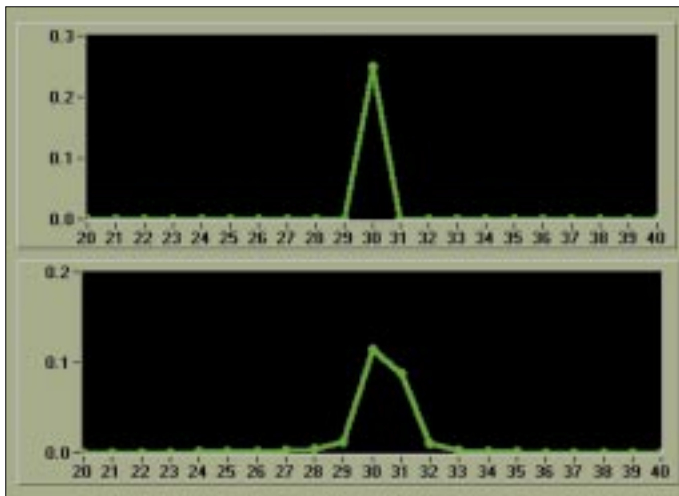


Bild 4. Reine Sinusschwingungen können je nach Taktung unterschiedlichste Leistungsspektren generieren. Im oberen Teilbild stimmen Taktung und Originalfrequenz der Sinusschwingung überein. Es zeigt sich ein klarer Peak. Im unteren Teil stimmen beide Größen dahingegen nicht überein, woraus Verwaschungen im Spektrum resultieren.

Repertoire zumeist nur Standardmethoden umfaßt, zu denen die Formel (1) nicht gehört. Ein gangbarer Weg setzt sich aus der Kombination verschiedener und jeweils einfacher Verfahren zusammen, die voll in der DSP-Welt angesiedelt sind.

Periodenermittlung in Signalen

Gewöhnlich geht man bei der Untersuchung von periodischen Signalen davon aus, daß man den Abtastvorgang im Einklang mit einer dem Signal innewohnenden Grundfrequenz ausführt. Streng genommen ist diese Unterstellung

aber nur selten erfüllt. Das zeigt sich sofort, wenn man mit einem Funktionsgenerator eine einfache Sinusschwingung generiert und diese einem Spektrumanalysator anbietet. Was dabei meistens zu beobachten ist (Bild 4 unten), ähnelt nur sehr wenig dem eigentlich zu erwartenden scharfen Peak bei der Grundfrequenz der Sinusschwingung.

Es entsteht in diesem Zusammenhang eine ganze Palette von Aufgabenstellungen, von denen die einfachste wohl lautet: Man ermittle von einer vorgegebenen Sinusschwingung die wahre Grundfrequenz unter Einsatz der Fouriertransformation. Weitere Probleme entstehen augenblicklich, sofern man Harmonische sowie Rauscheffekte zulässt.

Aus dem verwaschenen Spektrum von Bild 4 kann zunächst eine grobe Abschätzung der wahren Grundfrequenz ausgelesen werden mit einer Abweichung, die nicht größer ist als eine der verwendeten Signaleinheiten. Mit Hilfe dieser einschließenden Klammer $[f, f+1]$ gelingt es, die Grundfrequenz recht exakt zu bestimmen:

$$f_{\text{Grund}} = f + \frac{n}{\pi} \arctan \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + W} \right) \quad \text{mit } W = \frac{|FT(x)(f)|}{|FT(x)(f+1)|}$$

Für reine Sinusschwingungen ist diese Formel vollkommen exakt, selbst beim Auftreten von Harmonischen oder von kleineren Störungen ist sie in ausreichender Nähe des wahren Wertes ($FT(x)$ bedeutet „Fourier-Transformierte des Signals x “).

Eine andere Vorgehensweise löst dieselbe Aufgabenstellung unter Verwendung der sogenannten FFFT (Fractional Fast Fourier Transform). Im ersten Schritt wird wiederum die einschließende Klammer $[f, f+1]$ mit Hilfe einer FFT bestimmt. Im Intervall $[f, f+1]$ wird dann jedoch künstlich weiter verfeinert, indem Spektralwerte bei $f, f+d, f+2d, \dots$ mit einem fest gewählten d anhand der FFFT bestimmt werden. Als Ausgangsbasis wählt man natürlich das ursprünglich vorliegende Signal x . In diesem künstlich verfeinerten Spektrum sucht man den Peak, der mit hoher Exaktheit dem gesuchten Wert entspricht.

Der Doppler-Effekt

Wohl jeder kennt den Unterschied zwischen dem Motorengeräusch eines sich nähernden Autos und dem davonfahrenden Wagen. Während des ersten Teils sind deutlich höhere Geräusche zu hören als während des Wegfahrens. Zur Vereinfachung wird die abneh-

mende Lautstärke in Verbindung mit zunehmender Entfernung der Geräuschquelle zunächst nicht berücksichtigt.

Hinter dieser Angelegenheit steckt natürlich der Doppler-Effekt, dessen prinzipielle Wirkungsweise in Bild 5 gezeigt ist. Zur Vereinfachung der Berechnung ist der Empfänger direkt auf dem Weg der Geräuschquelle postiert. Kommt diese Quelle dem Empfänger mit konstanter Geschwindigkeit entgegen, so wird die ausgesendete Welle quasi gestaucht, was effektiv zu einer künstlichen Erhöhung der Frequenz führt; die Töne erscheinen somit höher. Beim Wegfahren läßt sich die umgekehrte Beobachtung machen. Es kommt zu einer Spreizung der Wellenfronten, was gleichbedeutend mit geringeren Frequenzen und somit tieferen Tönen ist. Daß man dieses Phänomen so deutlich wahrnimmt, ergibt sich aus der vergleichbaren Größenordnung von Schallgeschwindigkeit und Tempo des Fahrzeuges.

Aus der Sicht der Signaltheorie läßt sich der Doppler-Effekt relativ leicht simulieren. Einziges Problem: Ein gleichmäßig abgetastetes Signal verändert das Taktschema beim Erreichen des Empfängers.

Das Thema der Interpolation spielt im Gebiet der digitalen Signalverarbeitung eine bedeutsame Rolle, auch wenn das nicht immer sofort auf den ersten Blick zu sehen ist. Das fängt schon mit der Fouriertransformation an. Sieht man sich die Originaldaten der Fouriertransformation genauer an [2], so versucht man im Grunde genommen, das unbekannte Spektralverhalten mit Hilfe von Polynomen nachzubilden. Man erkennt das am ständigen Einsatz von Termen wie $\exp(-2\pi jki/N)$ sowie Potenzen davon.

Nun sind Polynominterpolationen sicherlich keine schlechten Werkzeuge, jedoch führen diese bei weitem nicht immer zum Erfolg. Diese Bemerkung trifft auch für das Schätzen von Spektren zu, nichts anderes tut nämlich die Fouriertransformation. Es dürfte einleuchten, daß kompliziertere Modelle oftmals zu qualitativ besseren Resultaten führen werden. In der Tat findet man folgerichtig in der Praxis auch nicht selten Ansätze, die sich auf Quotienten von Polynomen stützen. Mit diesen gelingt es beispielsweise viel besser, Singularitäten (extreme Peaks) nachzubilden.

Eine weitere bekannte Anwendung des Doppler-Effektes ist in der Kosmologie zu finden. Die Rotverschiebung im Spektrum des von Sternen ausgesendeten Lichts ist eine unmittelbare Folge der ständig zunehmenden Entfernungen im Weltall. Im Unterschied zum Auto-Beispiel sind die Geschwindigkeiten hier aber um Größenordnungen höher. Das ändert aber nichts am zugrundeliegenden Prinzip.

Zahlreiche weitere Fragestellungen entstehen, wenn man

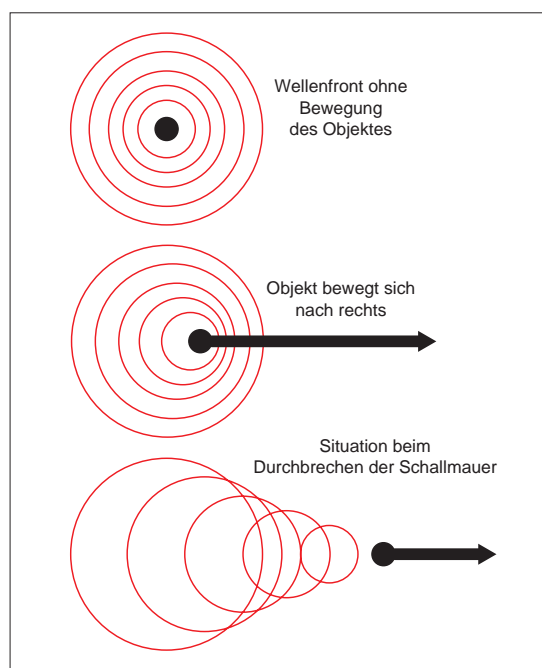


Bild 5. Das Prinzip des Doppler-Effekts. Bei einem sich bewegenden Objekt gelangen zum stationären Beobachter Wellenfronten mit verschobener Frequenz.

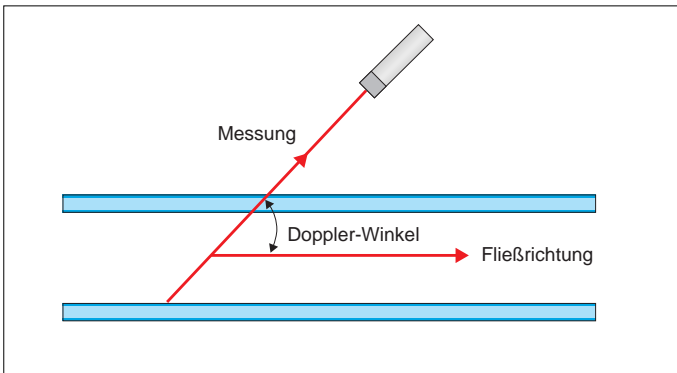


Bild 6. Anwendungsbeispiel aus der Medizintechnik: Geschwindigkeitsmessung des Blutstromes, basierend auf dem Doppler-Effekt.

den Doppler-Effekt als Informationsgeber nutzen will. Eine klassische Anwendung liegt dann vor, wenn man mit Hilfe des Ultraschalls die Geschwindigkeit des Blutes in Adern messen will (*Bild 6*). Man nutzt hierbei die Eigenschaft, daß Blutzellen als Reflektoren wirken. Die Relativbewegungen der Blutzellen bewirken eine Frequenzveränderung zwischen den ausgesendeten und den empfangenen Ultraschallwellen. Bei medizinischen Applikationen wird mit Frequenzen im Bereich von 1 MHz bis 10 MHz gearbeitet.

Da die Fließgeschwindigkeit des Blutes relativ gering ist, sind es die Frequenzverschiebungen auch. Insofern liegen die Verhältnisse komplizierter als beim eingangs geschilderten Beispiel des fahrenden Wagens. Um solch geringfügige Unterschiede messen zu können, muß leistungsstarke Elektronik eingesetzt werden.

Währungskurse durch die digitale Brille

Viele interessante Anwendungen der digitalen Signalverarbeitung lassen sich in der Finanzwelt finden. Exemplarisch wird hier der Fall des Devisenhandels anhand des Verhältnisses von US-Dollar zu Schweizer Franken behandelt. Ein Charakteristikum bei diesen Transaktionen ist, daß Notierungen (d.h. Kurse) zeitlich gesehen sehr oft und darüber hinaus ohne einen festen Rhythmus anfallen. *Bild 7* zeigt die Wechselkurse für den kurzen Zeitraum einiger Minuten. Neben der zeitlichen Information sind zwei Notierungen angegeben, die sogenannten Bid- und Ask-Preise. Wirkliche Geschäfte werden innerhalb dieser Spanne gemacht, sie dient letztlich dem Lebensunterhalt des Maklers.

Je nach Anhängerschaft zu bestimmten Schulen sehen Experten in Diagrammen wie dem des Bildes 7 die Regentschaft des reinen Zufalls oder auch wohldefinierte Muster, die es zu erkennen und vorherzusagen gilt. Hat man letzte-

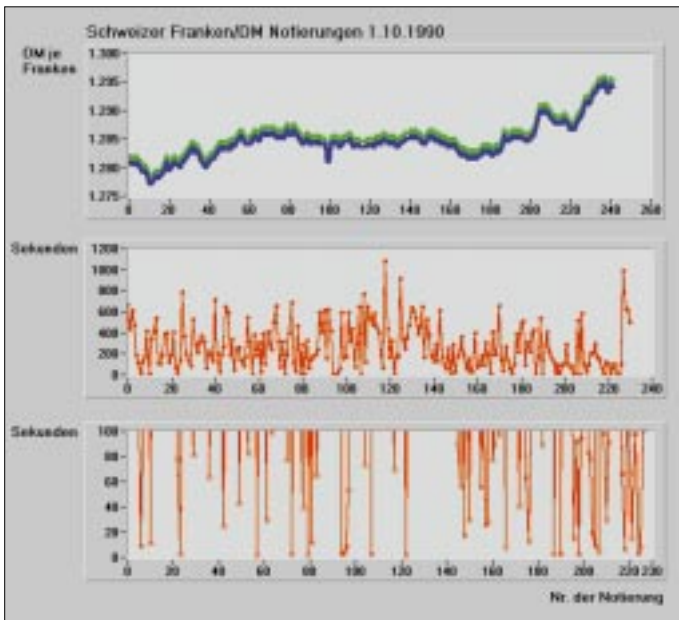


Bild 7. Wechselkursprünge können sehr unregelmäßig anfallen, was die Anwendung klassischer Methoden der digitalen Signalverarbeitung stark behindert. Gezeigt sind Schweizer-Franken/DM-Notierungen vom 1.10.1990. Im oberen Teilbild ist die Entwicklung des Kurses an diesem Tag dargestellt. Der mittlere Teil steht für den Zeitversatz zwischen jeweils zwei Notierungen, im Einzelfall können viele Minuten ohne Änderung verstreichen. Allerdings geht es manchmal auch im Sekundentakt voran (unten).

res vor, kann man auf zahlreiche Werkzeuge der digitalen Signalverarbeitung, Statistik und Mathematik zurückgreifen. Allerdings ist die Situation oftmals deutlich komplizierter als bei klassischen Aufgabenstellungen der genannten Theorien. Ein Grund dafür liegt im unregelmäßigen und noch dazu nicht vorhersagbaren Anfall von Daten. Ist man beispielhaft an zyklischen Phänomenen der Wechselkurse interessiert (Sekunden bis Jahre), so kann man nicht einfach die Fouriertransformation nutzen, da letztere in Standardnotation von gleichgroßen Zeitschritten ausgeht. Es leuchtet ein, daß der Abstand von aufeinanderfolgenden Wechselnotierungen ebenfalls ein Informationsträger ist.

Man kann die formulierte Aufgabenstellung aber durchaus mit weiterentwickelten Werkzeugen lösen. Im konkreten Fall muß man eine Verallgemeinerung der Fouriertransformation, das sogenannte Periodogramm, einsetzen.

Dr. Lothar Wenzel ist gebürtiger Berliner und hat Mathematik und Informatik in Greifswald und Dresden studiert. Nach Tätigkeiten in einem Kernkraftwerk und bei der BASF AG, Ludwigshafen, beschäftigt er sich z.Zt. an der University of Texas in Austin mit Fragen der grafischen Programmierung von komplexen Meßdatenverarbeitungs- und Simulationsproblemen.



Bild 8 zeigt Leistungsspektren nach Fourier und gemäß dem Periodogramm anhand eines durchsichtigeren Beispiels. Es bestehen demnach deutliche Unterschiede zwischen beiden Varianten, was nicht weiter verwunderlich ist, da die Fouriertransformation hier völlig fehl am Platze ist. Man bedenke in diesem Zusammenhang auch, daß es kaum gelingen wird, das Originalmaterial so zu interpolieren, daß die Fouriertransformation anwendbar wird. Es gibt einfach kein vernünftiges Vorhersagemodell dafür.

Wie geht es weiter?

Diese Serie wird mit der Vorstellung von Theorie und Praxis der Systeme fortgesetzt. Systeme beschreiben das Verhältnis von Signalen untereinander. Fast alles und jedes

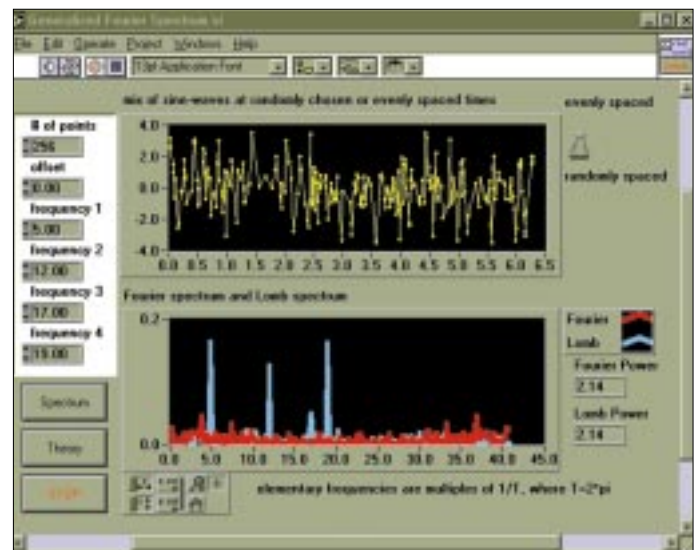


Bild 8. Gewöhnliches Leistungsspektrum versus Periodogramm. Das Signal setzt sich aus unregelmäßig abgetasteten Sinusschwingungen der Frequenzen 5 Hz, 12 Hz, 17 Hz und 19 Hz zusammen. Das gewöhnliche Powerspektrum versagt vollkommen, hingegen kann das Periodogramm alle Frequenzen exakt rekonstruieren.

in der uns umgebenden Welt kann als System aufgefaßt werden. Es werden sowohl die Analyse als auch die Synthese des Übertragungsverhaltens von Ein- und Ausgangssignalen behandelt. Später werden Anwendungen zur anschaulichen Vertiefung erläutert. gs

Literatur

- [1] Wenzel, L.: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 1. *Elektronik* 1998, H. 23, S. 96ff.
- [2] Wenzel, L.: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 2. *Elektronik* 1998, H. 25, S. 86ff.
- [3] Wenzel, L.: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 3. *Elektronik* 1999, H. 1, S. 52ff.
- [4] Wenzel, L.: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 4. *Elektronik* 1999, H. 3, S. 48ff.
- [5] Die im Text angegebenen Programme stehen zum Download bereit unter: www.natinst.com/germany