

Dr. Lothar Wenzel

Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei

Teil 7: z-Transformation, Laplace-Transformation und Signalrekonstruktion

Der erste Teil des Kapitels „Systeme“ (Teil 6 dieser Artikelreihe, [6]) legte mit den Definitionen von Signalen und Systemen die begrifflichen Grundlagen. Mit der z- und der Laplace-Transformation geht es hier nun um nützliche Werkzeuge, die die Beschreibung eines Systems erleichtern.

Nach dem Kennenlernen wichtiger Begriffe wie digitale Filter, Systemidentifikation und Fourier-Transformation ist es an der Zeit, den eigenen Betrachtungswinkel zu erweitern und gewissermaßen einen größeren Überblick über das Riesengebäude der digitalen Signalverarbeitung zu gewinnen. Hierbei geht es weniger um neue Ideen oder Theorien, vielmehr um eine Vereinheitlichung der bereits bekannten Ansätze. Es zeigt sich, daß bereits ein sehr einfach gestaltetes Diagramm genügt, um das Wesen der digitalen Signalverarbeitung in komprimierter Form darzustellen. Nach der Vorstellung dieses universell gültigen Schemas werden die beteiligten Komponenten erläutert und durch Beispiele in ihrer Wirkungsweise beschrieben.

Das allgemeine DSP-Schema

Fast alles, was man innerhalb des Gebietes der digitalen Signalverarbeitung tut, ist direkt oder indirekt Bestandteil des in *Bild 1* gezeigten generellen Schemas. Dementspre-

chend hat man es mit sechs eng verwandten Welten zu tun. Dem Wesen der digitalen Signalverarbeitung wird man am besten dadurch gerecht, daß man sich passend zwischen diesen Teilgebieten hin und her bewegt. Grundlegend steht die obere Reihe für Signale im Zeitbereich, die untere hingegen repräsentiert Daten im Frequenzraum. Bei praktischen Anwendungen wird das Ursprungssignal sehr oft reellwertig sein, während Frequenzinformationen häufig im Reich der komplexen Zahlen angesiedelt sind. Aus theoretischer Sicht und zuweilen auch im Praxiseinsatz spricht allerdings nichts gegen komplexwertige Signalstrukturen. Die Verbindung zwischen dem analogen und kontinuierlichen Zeitsignal $x(t)$ und dem zugeordneten Frequenzverhalten $X(s)$ wird über die Fourier-Transformation hergestellt. Die dazugehörige Theorie ist sehr mathematisch und praktisch nicht direkt verwendbar. Insbesondere zwei Gründe sind es hierbei, die Schwierigkeiten bereiten.

Zum einen muß das gesamte Signal von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ bekannt sein. Wir wählen hier als unabhängige Größe zur Vereinfachung die Zeit t , obwohl manchmal auch andere Größen auftreten können. Diese Modellvorstellung eines zeitlich unendlich ausgedehnten Signals ist aus Praxissicht

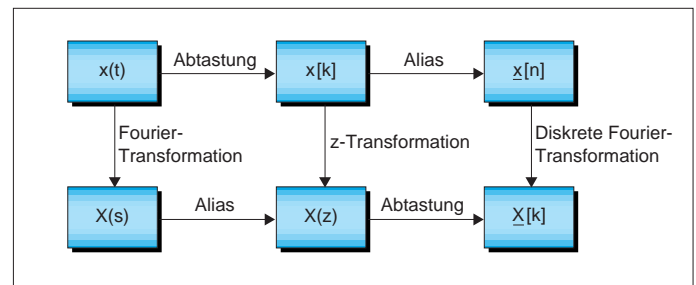


Bild 1. Das generelle Schema der digitalen Signalverarbeitung. Die Zusammenhänge zwischen Zeit- und Frequenzraum stellen verschiedene Transformationen her.

natürlich fern jeglicher Realität. Manchmal hilft die Annahme, daß das Signal $x(t)$ periodisch ist, aus der Klemme. Im Regelfall läßt sich allerdings nur hoffen, daß der Unterschied zwischen Ideal und Wirklichkeit nicht zu groß wird, wenn man Signale in zeitlicher Hinsicht beschränkt.

Das zweite Problem hat zu gleichen Teilen mit Restriktionen seitens der die Signale aufnehmenden Sensorik als

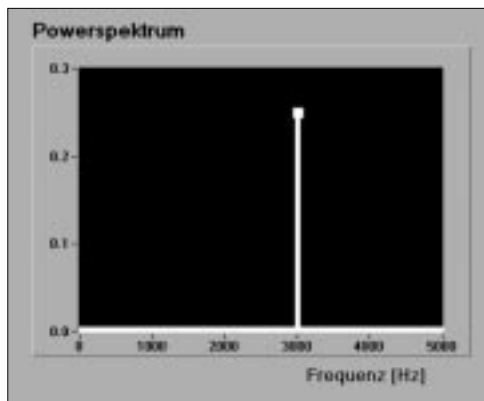


Bild 2. Was läßt sich aus einem gegebenen Leistungsspektrum exakt herauslesen? Eine Spitze bei 3 kHz bedeutet noch nicht automatisch, daß es sich um ein reines 3-kHz-Sinussignal handelt.

auch mit dem Speichervermögen der eingesetzten Hardware zu tun. Beides führt dazu, daß man bestimmte Grenzwerte bezüglich der Abtastrate prinzipiell nicht unterschreiten kann. Die Abtastung im Zeitbereich produziert aus dem in der realen Welt vorliegenden Signal $x(t)$ ein diskretes Gerüst, bestehend aus $x[k]$, wobei k alle ganzen Zahlen durchläuft. Die Notation $x[k]$ ist eine bequeme Schreibart für einen Term, der möglichst gut den Signalwert $x(k \cdot dt)$ beschreibt. Die Größe dt steht hierbei für die konstante Zeitspanne zwischen zwei Abtastungen. Am Rande sei bemerkt, daß die Konstanz des dt nicht notwendigerweise vorliegen muß, die Betrachtungen auf der anderen Seite aber wesentlich vereinfacht.

Das Resultat der Abtastung $x[k]$ besteht aber immer noch aus unendlich vielen Elementen, was sicherlich nur aus rein theoretischer Sicht sinnvoll ist. Insofern ist ein zweiter Mechanismus im Zeitbereich erforderlich. Das dahintersteckende Prinzip bereitet zahlreichen Neueinsteigern überraschend und gleichsam unnötig viele Kopfschmerzen. Eine Ursache dafür liegt vielleicht darin begründet, daß man leicht Effekte im Zeitmit denen im Frequenzbereich vermischt.

Der Alias-Mechanismus

Kurz gesagt, es geht um die Alias-Problematik. Umgangssprachlich ist darunter ja zu verstehen, daß ein- und dieselbe Person unter mehreren verschiedenen Namen auftritt. Im Gegensatz zu Felix Krull bringt es aber ein Signal der realen Welt auf unendlich viele unterschiedliche Tarnungen. Wirklich umgehen kann nämlich die digitale Signalverarbeitung keinesfalls mit Dingen wie $x[k]$, vielmehr stehen ausschließlich unendliche Summen der folgenden Art zur Verfügung:

$$\tilde{x}[n] = \sum x[n + j \cdot N] \quad (1)$$

Hierbei ist n eine natürliche Zahl zwischen 0 und $N - 1$. Die Größe N beschreibt sozusagen den Alias-Bereich. Jeweils N Abtastwerte auseinanderliegende $x[k]$ werden als dieselbe Person unter jeweils anderem Namen aufgefaßt und aufsummiert. Natürlich begeht man dabei einen Fehler, da man ja Information quasi vernichtet. Die Frage ist nur, ob das tolerierbar ist oder ob es zu dramatischen Konsequenzen führt.

Dasselbe Phänomen des Alias läßt sich im Frequenzbereich beobachten. Dazu ein konkretes Beispiel: Die Abtastrate soll exakt 10 kHz betragen. Angenommen, das Leistungsspektrum eines gegebenen Signals zeige ein Verhalten gemäß Bild 2. Läßt sich daraus schon schlußfolgern, daß das Signal aus einer reinen Sinusschwingung mit einer Frequenz von exakt 3 kHz besteht? Nicht ohne weiteres! Bild 3 verdeutlicht, daß beim Einsatz der genannten Abtastrate auch beispielhaft ein 7-kHz-Signal absolut dasselbe Leistungsspektrum produziert. Eine gleichlautende Aussage ist für viele weitere und, insgesamt gesehen, sogar für unendlich viele Frequenzen korrekt. Viele Frequenzen reisen demnach unter dem Namen 3 kHz. Das ist nichts anderes als der Alias-Mechanismus im Frequenzraum. Übrigens umgeht man dieses Problem in der Praxis zumeist dadurch, daß man geeignete Tiefpaßfilter einsetzt. Wir kommen auf die Problematik des Aliasings im Frequenzbereich später noch im Rahmen der Erläuterung eines Beispiels zurück.

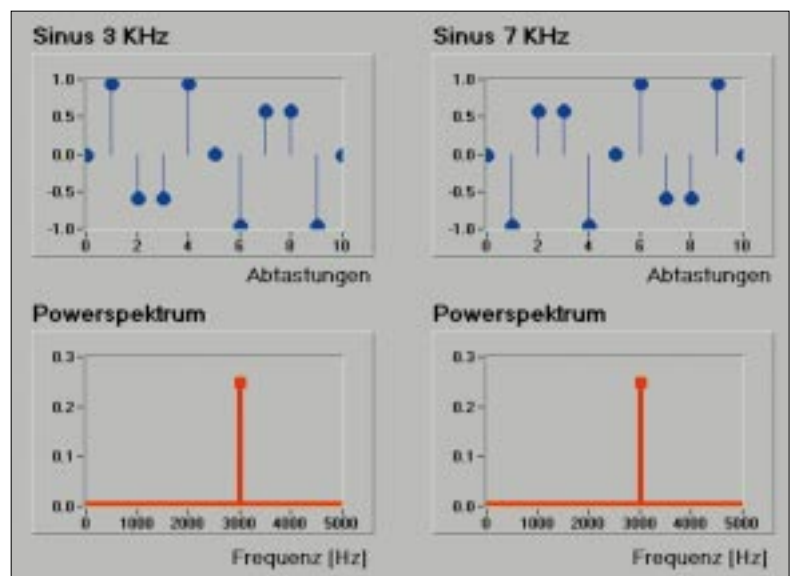


Bild 3. Verschiedene Sinusschwingungen produzieren ein- und dasselbe Leistungsspektrum. Alles hängt von der eingesetzten Abtastrate ab.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich das Schema aus Bild 1 sicherlich besser verstehen. Die obere Reihe überführt mittels Abtastung und Aliasing ein real vorliegendes Zeitsignal in die computergerechte und somit abgespeckte Version $x_n[n]$. Unter Zuhilfenahme der diskreten Fourier-

Transformation kann man den Wechsel nach $X[k]$ vornehmen. Im Frequenzraum läßt sich ein ähnliches Szenario beobachten, nur sind die Rollen von Abtastung und Alias faktisch getauscht. Der Abtastung im Zeitbereich ist der Alias-Mechanismus im Frequenzraum zugeordnet und umgekehrt. Zum vollen Verständnis des Diagrammes fehlt die Erläuterung zur z-Transformation.

Die z-Transformation

Interessanterweise firmiert die z-Transformation in der reinen Mathematik unter einem gänzlich anderen Namen, nämlich dem der Laurent-Reihe. Ein positiver Seiteneffekt ist der, daß hiermit eine extrem gut ausgebaute Theorie vorliegt, von der die Signalverarbeitung reichlich profitiert hat. Gemäß Bild 1 geht die z-Transformation von einem abgetasteten und beidseitig unendlich ausgedehnten Signal $x[k]$ aus. Hieraus wird mit Formel (2) ein neues Signal $X(z)$ im Frequenzraum generiert.

$$x_{(z)} = \sum x[k]z^{-k} \quad (2)$$

Die Größe z nimmt hierbei komplexe Werte an. Allerdings ist die Summenbildung in (2), die sich von $k = -\infty$ bis $k = +\infty$ erstreckt, nur dann zulässig, wenn die komplexe Größe z in Abhängigkeit von $x[k]$ gewissen Forderungen genügt. Dies läßt sich am besten auf Grundlage eines Beispiels erläutern:

Sei das abgetastete Signal $x[k]$ dergestalt, daß für negative k die Beziehung $x[k] = 0$ gilt, hingegen gelte für alle anderen ganzzahligen k -Werte $x[k] = 1$. Gemäß (2) liegt somit eine sogenannte unendliche geometrische Reihe in z^{-1} vor, d.h., es gilt:

$$x_{(z)} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (3)$$

Allerdings ist das nur dann richtig, falls der Betrag von z größer als 1 ist. In allen anderen Fällen divergiert die Reihe. Dieses Verhalten ist vollkommen charakteristisch für die z-Transformation. Konvergenz liegt außerhalb eines gewissen Kreises der komplexen Ebene vor.

Beziehungen zu digitalen Filtern

Zwischen digitalen Filtern und der z-Transformation liegt eine sehr einfache Verbindung vor. Hierzu erinnere man sich nochmals an die im Teil 4 der Serie erläuterte allgemeine Definition des IIR-Filters:

$$y[n] = (a[0]x[n] + a[1]x[n-1] + \dots + a[M]x[n-M]) - (b[1]y[n-1] + \dots + b[N]y[n-N]) \quad (4)$$

Die Koeffizienten a und b machen bekanntlich gerade die Qualität des konkreten Filters aus. Betrachtet man außerdem die originale Definition (2) der z-Transformation, so sieht man, daß zwischen der z-Transformation eines Signals $x[k]$ und der des um eine Stelle verschobenen Signals $x[k-1]$ eine einfache Relation besteht (vgl. auch *Kasten*). Insofern kann man die bereits vertraute Transferfunktion ein zweites Mal aus einer ganz anderen Ecke kennenlernen. Zwar stehen Werte der Filter-Transferfunktion für so gut wie alle komplexen Werte z zur Verfügung, interessant ist aber eigentlich nur das Verhalten der Transferfunktion auf dem Rand des komplexen Einheitskreises. Dieses Verhalten beschreibt nämlich vollständig die Frequenzeigenschaften des zur Debatte stehenden IIR-Filters.

Wie die Fourier-Transformation und die diskrete Variante davon besitzt auch die z-Transformation eine eindeutige Umkehrtransformation, die jedoch mehr aus theoretischer Sicht von Bedeutung ist. Schließlich ist auch noch die Laplace-Transformation zu nennen, die einerseits die kontinuierliche Variante der z-Transformation und andererseits auch eine Verallgemeinerung der Fourier-Transformation mit allgemeinen komplexwertigen Frequenzen ist. Eines

Translationseigenschaft der z-Transformation

Verschobene Signale generieren fast identische z-Transformationen. Darauf aufbauend läßt sich beispielhaft die Transferfunktion eines gegebenen IIR-Filters bestimmen. Die z-Transformierte $X(z)$ des Signales $x[k]$ ist gegeben durch:

$$X(z) = \sum x[k]z^{-k} \quad (A)$$

Für die z-Transformierte $X_1(z)$ des Signales $x[k-1]$ ergibt sich:

$$X_1(z) = \sum x[k-1]z^{-k} = \sum x[k]z^{-(k+1)} = z^{-1}X(z) \quad (B)$$

Transferfunktionen von IIR-Filtern

Gegeben sei folgendes IIR-Filter:

$$y[n] = (a[0]x[n] + a[1]x[n-1] + \dots + a[M]x[n-M]) - (b[1]y[n-1] + \dots + b[N]y[n-N]) \quad (C)$$

bzw. in Kurzform:

$$y[n] = \sum a[i]x[n-i] - \sum b[j]y[n-j] \quad (D)$$

Anwendung der z-Transformation auf beide Seiten liefert dann:

$$Y(z) = \sum a[i]z^{-i}X(z) - \sum b[j]z^{-j}Y(z) \quad (E)$$

Nach entsprechender Umformung ergibt sich die bekannte Transferfunktion:

$$Y(z) / X(z) = \sum a[i]z^{-i} / (1 + \sum b[j]z^{-j}) \quad (F)$$

der wesentlichen Merkmale der Laplace-Transformation besteht gerade darin, daß das Transformationsresultat eines Signals der Form $x(t)$ im wesentlichen die Ableitung der Laplace-Transformation von $x(t)$ ist. Das sieht nichtssagend aus, eröffnet aber die Möglichkeit, Differentialgleichungen auf algebraische Beziehungen zurückzuführen. Insbesondere historisch gesehen stellte das einen enormen Fortschritt dar.

Shannons Abtasttheorem

Von großer Wichtigkeit ist ein Ergebnis von Shannon, das das Schema in Bild 1 enorm stabilisiert. Grob gesagt geht es darum, die heuristische Vorstellung der Korrektheit des Überganges vom Signal der realen Welt zum abgetasteten $x[k]$ auf ein solides Fundament zu stellen. Dieses Vorhaben ist Shannon mit seinem berühmten Resultat in den ausgehenden vierziger Jahren unseres Jahrhunderts in geradezu perfekter Weise gelungen. Shannon hatte hierbei die Kommunikationsproblematik im Auge, Vorleistungen zum Abtasttheorem wurden von Whittaker im Jahre 1935 erbracht. Allerdings ist der theoretische Wert weit höher einzustufen als direkte praktische Konsequenzen. In der wirklichen Welt gibt es nichts, was einer Darstellung $x[k]$ für k von $-\infty$ bis $+\infty$ auch nur annähernd gleichkäme.

Shannons Theorem geht von einem beliebigen Signal $x(t)$ aus. Einzige Forderung: Es sollen keine Frequenzkomponenten jenseits von 1 Hz im Signal vorliegen. Läßt sich dann $x(t)$ vollständig aus der Kenntnis der Werte $x[k] = x(k)$ für alle ganzen Zahlen k rekonstruieren? Die Antwort darauf ist eindeutig „Ja“ und stützt sich darüber hinaus auf eine relativ einfache Formel. *Bild 4* erläutert diesen Sachverhalt anhand eines Beispiels. Ferner wird auch der Hintergrund für die Formel von Shannon offengelegt. Es besteht eine sehr enge Verbindung zu einer perfekten Tiefpaßcharakteristik mit dem Frequenzschnitt bei exakt 1 Hz.

Mit Hilfe des Programms SHANNON kann man sich den Approximationsprozeß näher ansehen. Als Basis dienen nutzerdefinierte Funktionen, die symbolisch eingegeben werden. Die Anzahl der Approximationsglieder ist ebenfalls einstellbar. Mit der Ordnung nimmt die Güte der Annäherung zu.

Läßt sich Nyquist umgehen?

Wir kommen nochmals auf die Alias-Problematik im Zusammenhang mit der weiter oben erläuterten Abtastrate von 10 kHz zurück. Dementsprechend läßt sich nicht zwischen einer reinen 3-kHz-Sinusschwingung und – um nur einen weiteren anderen Vertreter zu wählen – einem 7-kHz-Sinus basierend einzig und allein auf dem Leistungsspektrum unterscheiden. Beide Komponenten könnten jeweils für die scharfe Spitze bei 3 kHz verantwortlich sein, es könnte aber auch eine lineare Kombination beider Signale vorliegen. Und damit noch nicht genug, zusätzlich ist es sogar der Fall, daß zahlreiche weitere Frequenzen dieselbe Wirkung im Spektrum erzielen. Falls man sich einzig auf die beiden Frequenzen 3 kHz und 7 kHz konzentriert, entsteht die Frage, ob es einen Trick gibt, trotz dieser Mehrdeutigkeit eine sichere Entscheidung zu fällen. Man

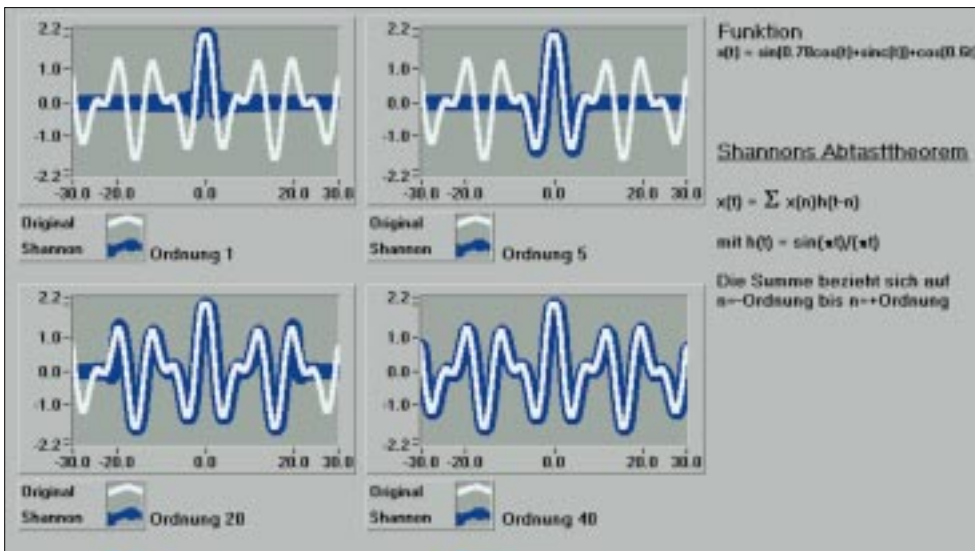


Bild 4. Das Resultat von Shannon lässt sich mit Hilfe einer relativ einfachen Formel notieren. Mit wachsender Ordnung nimmt die Güte der Approximation deutlich zu. Es genügt demnach bei bandbegrenzten Signalen bereits die Kenntnis der Werte $x(n)$ für alle ganzen Zahlen n , um den gesamten Informationsgehalt $x(t)$ für alle reellen Zahlen t zu rekonstruieren.

kann diese Problemstellung auch anders formulieren. Da man gemäß dem Nyquist-Theorem nicht oberhalb von 5 kHz irgendwelche Resultate erwarten darf, ergibt sich die Frage, ob Nyquist doch nicht so generell gültig ist. Die Antwort darauf mag auf den ersten Blick etwas überraschend klingen. In der Tat gelingt diese Entscheidung, sofern man eine zusätzliche Eigenschaft des Erfassungssystems zulässt. Diese zusätzliche Eigenschaft bezieht sich auf eine Änderung der Abtastrate nach einer gewissen Zeitspanne. Die erste Hälfte des Signals soll beispielsweise mit 10 kHz abgetastet werden, der zweite Teil ist hingegen mit 9 kHz gesampelt. Wichtig ist nun, in welcher Form sich die 3-kHz- und die 7-kHz-Anteile bei den unterschiedlichen Abtastraten abbilden. Im einzelnen gilt:

- Abtastrate 10 kHz:
 3-kHz-Sinus verursacht Spitze bei 3 kHz.
 7-kHz-Sinus verursacht Spitze bei 3 kHz.
- Abtastrate 9 kHz:
 3-kHz-Sinus verursacht Spitze bei 3 kHz.
 7-kHz-Sinus verursacht Spitze bei 2 kHz.

Umgekehrt lässt sich demnach aus der Lage der Spitze bei der 10-kHz- bzw. 9-kHz-Abtastung folgender Schluß ziehen:

- 3-kHz-Spitze bei 10-kHz-Abtastung und 3-kHz-Spitze bei 9-kHz-Abtastung bedeutet ein Signal von 3 kHz.
- 3-kHz-Spitze bei 10-kHz-Abtastung und 2-kHz-Spitze bei 9-kHz-Abtastung bedeutet ein Signal von 7 kHz.

Dieses Prinzip lässt sich auch bei komplizierteren Situationen erfolgreich nutzen. Nimmt man weitere unterschiedliche Abtastraten hinzu, so kann man durchaus eine Sinusfrequenz detektieren, die im Bereich jenseits der 100 kHz liegt, ohne daß man jemals schneller als 10 kHz abtasten müßte.

Allerdings wachsen die Bäume auch hierbei nicht in den Himmel. So vielversprechend diese Idee auch aussehen

mag, die harte Realität setzt ebenfalls Grenzen. Oftmals werden zahlreiche Frequenzanteile in einem Signal stecken, und Rauscheffekte verfälschen die Qualität im Frequenzraum signifikant. Außerdem wurde hier von der idealen Situation ausgegangen, daß die zu detektierenden Frequenzen im Einklang mit der Abtastrate stehen. Eine 10-kHz-Abtastung liefert Frequenzwerte bei 0 Hz, 1 Hz, 2 Hz, ... usw., so daß ein Wert von 3 kHz gut in dieses Schema paßt. Anders sieht es dann schon für die Frequenz 3000,423 Hz aus. Diesmal ist die Situation nicht ganz so angenehm. Bild 5 demonstriert die daraus erwachsende Problematik. Spitzen verlieren demnach deutlich an Struktur. Nichtsdestotrotz kann gegebenenfalls und mit entsprechen-

der Sorgfalt die beschriebene Methodik zur Umgehung des Nyquist-Theorems zum Einsatz kommen.

Synthese von Signalen

Die Nachbildung des Klangbildes von Instrumenten paßt ganz gut zum Thema der Signalrekonstruktion und bietet sich aus diesem Grunde als Beispiel an. Das von einem Musikinstrument produzierte Signal $x(t)$ läßt sich mit Formel 5 darstellen.

$$x(t) = \sum A_k(t) \sin(2\pi f_k(t) \cdot t) \quad (5)$$

Die Summenbildung läuft von $k = 1$ bis zu $k = N$. Der Wert von N muß dabei nicht einmal sehr groß sein. Die Frequenz $f_k(t)$ variiert gewöhnlich schwach in Abhängigkeit von der Zeit t , die Amplituden $A_k(t)$ sind dahingegen deutlich zeitabhängig. Für einen einzelnen Ton kann man sehr oft die Modellvorstellung $f_k(t) = kf_0$ zur Anwendung bringen,

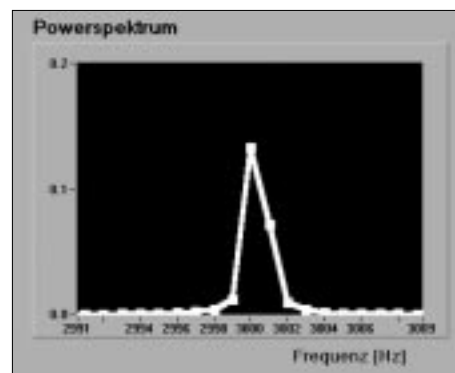


Bild 5. Bei bestimmten Frequenzen zeigen Sinusschwingungen eine nicht so scharfe Spitze im Spektrum. Entscheidend ist stets das Verhältnis zur Takt-rate.

d.h., alle auftretenden Frequenzen sind Harmonische der Grundfrequenz f_0 .

Die Synthesaufgabe reduziert sich im letzteren Fall auf die passende Ermittlung der Funktionen $A_k(t)$. Diese lassen sich in Form eines Gebirges darstellen. Eine Achse wird von der Zeit gebildet, die andere Skalierung bezieht sich auf die verschiedenen Werte von k . Die Höhe eines Punktes ist gerade der Wert $A_k(t)$. Sehr oft genügt bereits eine lineare Interpolation in t , basierend auf nur wenigen Stützwerten mit festem Wert von k . Der Ton wird somit in Form eines zweidimensionalen Arrays von Amplitudenwerten beschrieben. Die Dimensionen dieses Feldes sind eher gering.

Das komplette Syntheseproblem ist selbstverständlich komplizierter. Zuweilen will man auch Spezialeffekte wie Raumklang oder natürliche Echos einarbeiten. Prinzipiell ist die digitale Signalverarbeitung jedoch in der Lage, alle diese Situationen wirklichkeitsgetreu nachzubilden.

Zweidimensionale Signale

Ein späterer Teil der Serie wird auf das Thema Bildverarbeitung als klassische Domäne der zweidimensionalen Signalverarbeitung noch genauer eingehen. An dieser Stelle wird nur auf einige Tatsachen verwiesen, die in Zusammenhang mit der hier zur Debatte stehenden Problematik stehen.

Grundlegend läßt sich die gesamte, für zeitabhängige und eindimensionale Signale aufgebaute Theorie ohne weiteres auf den zwei- bzw. höherdimensionalen Fall übertragen. Die zugrundeliegende Mathematik wird manchmal etwas komplizierter, jedoch bleibt das Wesen der Sache dabei weitgehend erhalten. So wird man alten Bekannten, wie der Fourier-Transformation, IIR- sowie FIR-Filtern etc., nochmals begegnen. Als vorteilhaft erweist sich dabei, daß man die meisten Konzepte nur zu adaptieren, jedoch keinesfalls neu zu erlernen hat. Problematisch ist eher der Rechenaufwand, der Echtzeit-Berechnungen nicht selten zu einer Herausforderung werden läßt.

Im nächsten Teil der Serie geht es um Datenfitting und Vorhersage. gs

Literatur

- [1] Wenzel, L.: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 1. *Elektronik* 1998, H. 23, S. 96ff.
- [2] Wenzel, L.: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 2. *Elektronik* 1998, H. 25, S. 86ff.
- [3] Wenzel, L.: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 3. *Elektronik* 1999, H. 1, S. 52ff.
- [4] Wenzel, L.: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 4. *Elektronik* 1999, H. 3, S. 48ff.
- [5] Wenzel, L.: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 5. *Elektronik* 1999, H. 5, S. 60ff.
- [6] Wenzel, L.: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 6. *Elektronik* 1999, H. 7, S. 58ff.
- [7] Die im Text angegebenen Programme stehen zum Download bereit unter: www.natinst.com/germany



Dr. Lothar Wenzel ist gebürtiger Berliner und hat Mathematik und Informatik in Greifswald und Dresden studiert. Nach Tätigkeiten in einem Kernkraftwerk und bei der BASF AG, Ludwigshafen, beschäftigt er sich z.Zt. bei National Instruments in Austin, Texas, mit dem Design von Algorithmen auf den Gebieten Simulation, Regelung, Mathematik und Bildverarbeitung.