Dr. Lothar Wenzel

Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei

Teil 10: Wavelets und Joint-Time-Frequency-Transformationen

Mit dem Thema Wavelets und Joint-Time-Frequency-Transformationen beginnt nun der letzte Abschnitt dieser Grundlagen-Serie zur digitalen Signalverarbeitung, der „Fortgeschrittene Techniken“ zum Thema hat.

Dieser Teil der Serie befaßt sich mit den vielversprechenden Verallgemeinerungen der Fourier-Transformation. Es war ein langer Weg bis zur Entdeckung und Etablierung dieser neuen Ideen, die langsam aber sicher zum Allgemeingut der Ingenieure und Wissenschaftler werden. Wavelets, die daraus abgeleiteten Transformationen und die Joint Time-Frequency Analysis i.allg. können Aufgabenstellungen behandeln, bei denen die klassischen Ansätze passen müssen. Die ganze Tragweite der damit zusammenhängenden Methoden und Verfahren ist noch gar nicht genau abzuschätzen. Die Zukunft dieses Gebietes dürfte durch zahlreiche Überraschungen geprägt sein.

Stationäre Welten?

Oftmals ist das reine Zeitsignal nur wenig aussagekräftig. So lassen sich gesprochene oder mit einem Rekorder aufgezeichnete Laute, Worte und Sätze aus dem Zeitsignal direkt und basierend auf einem Computersystem signaltheoretisch kaum erschließen. Ein anderes Beispiel sind verrauschte Bilder oder Audiosequenzen, die man qualitativ verbessern möchte. Wiederum hat man größte Mühe, derartige Maßnahmen unmittelbar im Zeitsignal vorzunehmen.

Als wesentlich geeigneter erweisen sich in diesem Zusammenhang Transformationen, die den vorgegebenen zeitlichen Ablauf in ein anderes Signal umwandeln. Mit Abstand der wichtigste Vertreter dieser Gattung ist ohne Zweifel die Fourier-Transformation, die zeitliche in Frequenzinformationen wandelt. Der große Vorteil der Fourier-Transformation liegt neben der mathematischen Ein-

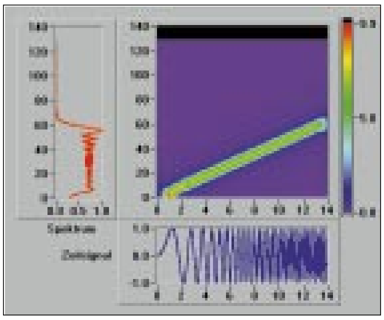

Bild 1.
Gezeigt sind sowohl das zeitlich vorliegende Chirp-Signal (unten), das gewöhnliche Spektrum (links) als auch die Short-Time-Fourier-Transformation (rechts). Letzteres Diagramm vereinigt zeitliche und spektrale Informationen.

fachheit und Eleganz in der physikalischen Relevanz. Frequenzkomponenten stehen in eindeutiger Beziehung zu Energieanteilen. Es leuchtet ein, daß Dinge wie gesprochene Worte oder verrauschte Signale unmittelbare Widerspiegelung in Frequenzspektren finden.

Die Bedeutung der Fourier-Transformation darf weder aus theoretischer noch aus praktischer Sicht unterschätzt werden. Trotzdem liegt damit kein Allheilmittel vor. Eine der wesentlichsten Einschränkungen, die der Fourier-Transformation auferlegt werden muß, ist die Stationarität. Diese besagt, daß spektrale Eigenschaften des Signals nicht vom Zeitpunkt der Betrachtung abhängen dürfen. Nimmt man zum Beispiel ein Chirp-Signal und berechnet das Spektrum, so ist das Ausgangssignal offenbar alles andere als stationär. *Bild 1* legt vielmehr nahe, daß am Anfang geringe Frequenzen, später jedoch höhere Frequenzen dominieren.

Insofern entsteht der Wunsch nach einer geeigneten Kombination von Zeit- und Frequenzanteilen gegebener Signale. In den letzten Jahren hat sich nicht zuletzt durch das rasante Voranschreiten der Rechnertechnik allerhand getan. Hierdurch haben sich auch völlig neuartige Anwendungsmöglichkeiten ergeben.

Joint Time-Frequency Analysis (JTFA)

Obwohl die Fourier-Transformation eine dominante Rolle innerhalb der Signalverarbeitung spielt, genügt sie offenbar nicht zur Erfassung zeitlicher Veränderungen im globalen Sinne. Es ist sogar so, daß fast alle wirklich praktisch relevanten Daten diese Zeitabhängigkeit in zweiter Instanz besitzen. Man denke in diesem Zusammenhang etwa an die bereits genannten Sprachsignale.

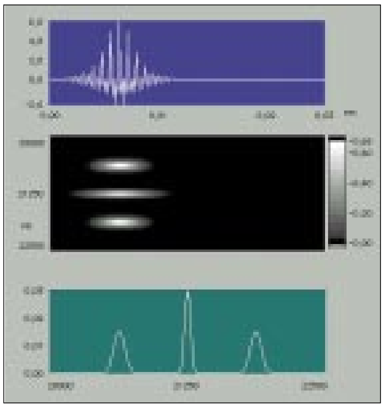

Bild 2.
Auf Short-Time-Fourier-Transformationen basierende Ansätze überführen im Gegensatz zur Fourier-Transformation (unten) gegebene Signale (oben) nicht in eindimensionale Strukturen. Das Ergebnis besteht vielmehr sowohl aus zeitlichen als auch spektralen Komponenten. Der Begriff des Spektrums trägt hierbei zusätzlich einen neuen, nur lokal gültigen Bedeutungsinhalt.

In jüngster Zeit haben sich zwei Hauptrichtungen zur Behandlung dieser Problematik herausgebildet. Genauer gesagt handelt es sich um die sogenannten linearen und quadratischen Ansätze. Letztere tragen häufig auch den Namen bilinear. Insgesamt gesehen spannen diese Methoden das Gebiet der Joint Time-Frequency Analysis auf.

Die wichtigsten Vertreter der linearen Transformation sind die Short-Time-Fourier-Transformationen und die auf Wavelets beruhenden Verfahren. Die Klasse der bilinearen Transformationen ist ungleich breiter angelegt. Zwei der wichtigsten Vertreter sind die Wigner-Ville-Distribution und die Choi-Williams-Distribution. Die Arbeitsweise der vier genannten Transformationen wird hier vorgestellt und durch einige Bemerkungen ergänzt.

Lineare Transformationen

Der mit Abstand einfachste Vertreter der hier betrachteten Gattung ist die Short-Time-Fourier-Transformation (STFT). Die gewöhnliche Fourier-Transformation charakterisiert Signale mit Hilfe sinusförmiger Abläufe bzw. komplexwertiger Exponentialfunktionen. Insofern ist auf zeitlicher Ebene keinerlei Differenzierung zu erwarten. Die STFT geht hingegen von Basisfunktionen aus, die sowohl in Zeit als auch Frequenz konzentriert sind. Ein wichtiger Vertreter sind Gauß'sche Funktionen, die sogar in Hinsicht auf gleichzeitige Zeit- und Frequenz-Bündelung optimal sind.

Die STFT eines gegebenen Signals s(t) läßt sich durch *Formel 1* ermitteln:

$$\mathrm{STFT}(t,\omega) = \int s(\tau)\,\gamma^*(\tau - t)\exp(-j\omega\tau)\,d\tau \qquad (1)$$

Hierbei ist die Funktion γ noch zu bestimmen, eine passende Wahl macht gerade die Qualität der konkreten STFT aus. Üblicherweise ist γ zeitlich stark konzentriert (z.B. Gauß'sche Funktion), deshalb ist auch der Name Fensterfunktion gebräuchlich.

Im Gegensatz zur gewöhnlichen Fourier-Transformation, die ein Zeit- in ein Frequenzsignal transformiert, findet bei der STFT die Wandlung eines Zeitsignals in eine Funktion sowohl der Zeit als auch der Frequenz statt. Das bringt in der unmittelbaren Auswertung viele Vorteile mit sich, kompliziert aber andererseits auch die Behandlung dieser Transformation. So ist die Invertierung einer STFT viel anspruchsvoller als die Umkehrung einer gewöhnlichen Fourier-Transformation. Bei letzterer fällt die Invertierung bekanntlich im wesentlichen mit der Fourier-Transformation selbst zusammen. Es ist nun so, daß derartige Invertierungen zum elementaren Repertoire der Signalverarbeitung gehören und deshalb von enormer Bedeutung im praktischen Einsatz sind.

Die konkrete Berechnung von (1) ist relativ einfach. Für ein fixiertes t steht auf der rechten Seite nichts anderes als eine Definition einer Fourier-Transformation, wobei die zu transformierende Funktion wegen der Fenstereigenschaft von γ zeitlich konzentriert ist. Man kann sich die Wirkungsweise der STFT demnach so vorstellen, daß ein Fenster zeitlich über das Signal s hinwegläuft und dabei lokal Fourier-Transformationen ausführt. *Bild 2* zeigt das Ergebnis einer derartigen Vorgehensweise anhand eines gegebenen Signals s.

In der Anwendung hat man es meistens mit dem betragsmäßigen Quadrat der STFT zu tun. Hierfür wurde der Begriff STFT-Spektrogramm geprägt.

Wavelet-Transformationen sind auch linear

Der zweite wichtige Vertreter der Klasse der linearen Transformationen basiert auf den sogenannten Wavelets, von denen es übrigens extrem viele gibt. Der Name deutet

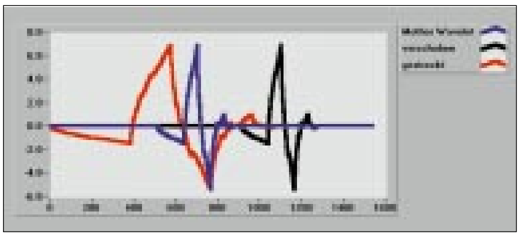

Bild 3.
Einige Funktionen der Wavelet-Basis. Neben dem Original sind eine verschobene und eine gestreckte Variante zu erkennen. Die Gesamtheit all dieser Vertreter kann eine gegebene Funktion im Detail beschreiben.

bereits auf die Arbeitsweise dieser Transformationen hin. Im Gegensatz zur Fourier-Transformation, die mit sinusförmigen Funktionen gestaffelter Frequenzen agiert (bzw. mit komplexwertigen Exponentialfunktionen), kommen bei den Wavelets Basisfunktionen zum Einsatz, die sowohl skaliert als auch zeitlich verschoben werden (*Bild 3*). Die nicht skalierte und nicht verschobene Basisfunktion wird Mother-Wavelet genannt.

Interessanterweise ist die Ausgangsidee ziemlich alt, jedoch erst in den zurückliegenden zehn Jahren setzte die äußerst stürmische Entwicklung der Wavelets ein, die bis heute ungebrochen anhält.

In der stetigen Version läßt sich die Wavelet-Transformation in der allgemeinen Form

$$\mathrm{CWT}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int s(t)\, \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \qquad a \neq 0 \qquad (2)$$

notieren, wobei ψ das bereits erwähnte Mother-Wavelet ist. Der Term $(t - b)/a$ steht für die Skalierung und Verschiebung. Ein signifikanter Unterschied zu den STFT besteht darin, daß bei den Wavelets zusätzliche Forderungen an ψ gestellt werden müssen, während die Definition der STFT weitgehend ohne Zusatzbedingungen auskommt. Die bei den Wavelets zu formulierende Forderung an ψ hat folgende Form:

$$C_\Psi = \frac{1}{2\pi} \int \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \qquad (3)$$

$\Psi(\omega)$ = Fourier-Transformation von Ψ

Ist diese Bedingung erfüllt, gelingt auch die Rücktransformation:

$$s(t) = \frac{1}{C_\Psi} \iint \frac{1}{a^2}\, \mathrm{CWT}(a,b)\, \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) da\, db \qquad (4)$$

Man beachte, daß die Wavelet-Transformation bei Vorgabe reellwertiger Signale und reellwertiger Mother-Wavelets ψ selbst wieder reellwertig ist. Das ist ein deutlicher Vorteil gegenüber der STFT, die in der Regel zu komplexwertigen Ergebnissen führt. Die prinzipielle Vorgehensweise bei Wavelet-Transformationen zeigt *Bild 4*.

Historische Wurzeln reichen nach Frankreich und Belgien

Wavelets haben wie alle anderen Disziplinen der digitalen Signalverarbeitung natürlich auch eine Vorgeschichte. Diese startet etwa im Jahre 1930, wirklich interessant wurde es allerdings erst ab 1960. Der Geophysiker Jean Morlet der französischen Firma Elf arbeitete an Tools zur sicheren Erkennung von aussichtsreichen Ölvorkommen. Man löst z.B. durch kleinere Explosionen Vibrationen in Gesteinsformationen aus, die sich mit geeigneter Sensorik verfolgen lassen (*Bild 5*). Hierdurch gelingt sowohl die Bestimmung der Tiefe von bestimmten Gesteinsschichten als auch die der Dicke. Letzteres ist zwar extrem wichtig, aber basierend auf der Fourier-Transformation allein kaum machbar. Erschwerend kommt hinzu, daß die auftretenden Wellen miteinander interferieren.

Morlet versuchte folgerichtig, mit Joint-Time-Frequency-Methoden dem Problem näherzurücken, wobei seine Fenster-Strategien im Laufe der Zeit immer ausgefeilter wurden. Als auch das scheiterte, drehte er den Spieß einfach um. Anstatt mit festen Fensterlängen und variablen Frequenzen zu arbeiten, ließ er veränderliche Fensterlängen zu, wobei die Frequenzen fixiert wurden. Genau dieses Prinzip findet sich in der modernen Theorie der Wavelet-Transformationen wieder. Im übrigen hört man für Wavelets auch manchmal den hübschen Namen mathematisches Mikroskop, der Hintergrund hierfür dürfte klar sein.

Man kann nicht sagen, daß Wavelets Frequenzen direkt repräsentieren. Es ist mehr so, daß man mit ganzen Sätzen hiervon ein gegebenes Signal faktisch in allen möglichen Situationen abklopft.

Ein wirklich interessantes Detail der Entwicklung der Wavelets betrifft den Umstand, daß zumindest einige Teile der Theorie bereits vorher und unter vielen verschiedenen Namen bekannt waren. Hierunter fallen Begriffe wie Pyramid-Algorithmen der Bildverarbeitung, Subband-Codierung innerhalb der Signalverarbeitung oder auch Quadrature Mirror Filter auf dem Gebiet der Spracherkennung. Es war das Verdienst des jungen französischen Wissenschaftlers Mallat, all diese getrennten Anwendungen zu vereinigen. Man hört für diese übergreifende Betrachtungsweise heutzutage auch zuweilen den Namen Multiresolution Theory.

Die ersten Wavelets hatten als Funktionen gesehen noch einen entscheidenden Nachteil. Sie waren ähnlich wie Sinus- und Cosinusfunktionen unendlich im Raum ausgedehnt. Der Durchbruch kam durch die belgische Forscherin Daubechies, die durch die Einführung bestimmter Wavelets eine Lawine von Aktivitäten auslöste.

Diese Wavelets (siehe beispielhaft *Bild 6*) besitzen unter anderem die Eigenschaft, daß sie einen kompakten Träger haben, d.h. zeitlich (oder wenn man will räumlich) nur eine beschränkte Ausdehnung besitzen. Das ermöglicht unter anderem den Aufbau von schnell arbeitenden und somit praktisch einsetzbaren Wavelet-Transformationen.

Einige Anwendungen von Wavelets

Wohl keine zweite Disziplin der digitalen Signalverarbeitung ist solch einer stürmischen Entwicklung ausgesetzt wie die der Wavelets. So verwundert es auch nicht, daß zahlreiche Anwendungsbereiche in der Diskussion sind bzw. schon realisiert wurden.

Um es vorweg zu nehmen, Wavelet-Transformationen als Verallgemeinerung der Fourier-Transformation haben auch ihre Grenzen. So ist man ziemlich sicher, daß Gebiete, die stark von den üblichen Frequenzvorstellungen geprägt sind (Musik und Sprache), wohl nicht die Hauptanwendungsfelder der Wavelets sein werden. Hier ist ohne Zweifel die Fourier-Transformation das Maß der Dinge.

Die wirklichen Stärken der Wavelet-Transformation liegen auf anderen Gebieten. So kann man mit ihrer Hilfe sehr robuste Verfahren aufbauen. Wenn ein Signal etwa

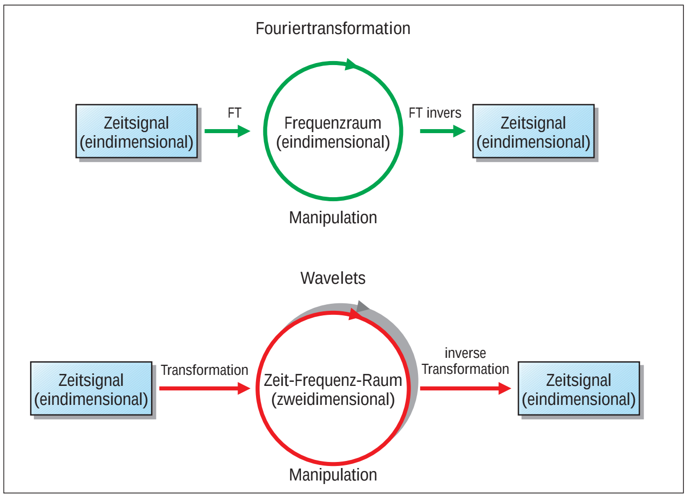

Bild 4. Wavelet-Transformationen überführen Zeitsignale in physikalisch nicht direkt interpretierbare Räume. Das ist vielleicht eine der Erklärungsversuche für die relativ zögerliche Akzeptanz dieser Methode in der Praxis.

leicht gestört ist, so hat das für die Fourier-Transformation globale Konsequenzen. Anders gesagt, der Fehler zieht sich durch das gesamte weitere Geschehen. Wavelet-Transformationen sind hierbei weitaus selektiver und somit robuster. Anwendungen hierfür reichen von der Tomografie bis zur Kosmologie. Im letzteren Fall gelang es hierauf basierend, Informationen über die wahre Verteilung von Sternen und Galaxien im Kosmos zu gewinnen.

Es spricht auch viel dafür, daß Wavelets besser geeignet sind, die äußere Gestalt von Objekten in Bildern zu beschreiben. Man wählt hierzu oftmals die Fourier-Transformation als effiziente und invariante Codierung solcher Umrisse. Wavelet-Transformationen stehen dem nicht nach, sind aber insgesamt gesehen sogar stabiler.

Wavelets und Rauschunterdrückung

Eine interessante Anwendung mit weitreichenden Anwendungen ist die Rauschunterdrückung in Signalen. Neuester Stand der Dinge ist hierbei eine Idee, die den Namen Wavelet Maxima trägt. Folgender Algorithmus kommt dabei zur Anwendung:

(1) Man berechne die Wavelet-Koeffizienten eines gegebenen Signals!

(2) Alle so bestimmten Koeffizienten werden jeweils mit den unmittelbaren Nachbarkoeffizienten verglichen. Ist ein solcher Koeffizient größer als die Nachbarn, so hebe man ihn auf. Die restlichen Werte werden zu 0 gesetzt.

(3) Man transformiere das Resultat zurück.

Das Ergebnis besitzt exzellente „Rauscheigenschaften“, d.h., man hat in einer sehr effektiven Art und Weise Störungen beseitigt. Insbesondere ist der feine Zungenschlag der Nachbarschaft zu beachten. Das Verfahren wäre an sich nicht neu, wenn man Wavelet-Koeffizienten unterhalb einer gewissen Schranke zu 0 setzt. Das Verfahren (1) bis (3) benötigt diesen zusätzlichen Parameter nicht und ist darüber hinaus wesentlich besser. Anwendungen dieser Idee finden sich z.B. bei der Erkennung von Gesichtern, was ganz sicher zu den extrem anspruchsvollen Problemen der Bildverarbeitung zählt.

Datenreduktion

Die gerade vorgestellte Idee ist natürlich bereits sehr nahe am Kompressions-Gedanken. Da Familien von Wavelets perfekt auf Veränderungen ansprechen und da eigentlich nur diese wirkliche Informationsträger sind, glauben viele, daß man mit den Wavelet-Transformationen die idealen Bildkompressoren gefunden hat. Man kann tatsächlich hiermit Raten bis 40 erzielen, allerdings stehen die neuen MPEG- und JPEG-Standards dem kaum nach. Ferner sind da auch noch andere Verfahren mit weit besseren Verspre-

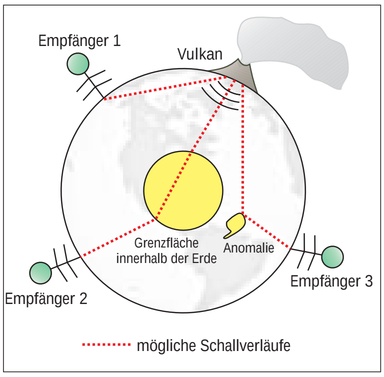

Bild 5.
Einer der Gründe für die Einführung von Wavelets liegt überraschenderweise in der Erforschung von Erdöllagerstätten. Es zeigte sich, daß Fourier-Transformationen nur begrenzt einsetzbar sind, wenn man höherfrequente Anteile (stehen in diesem Fall für dünnere Schichten im Gestein) sicher detektieren will.

chungen, beispielhaft solche, die auf Fraktalen beruhen. Im übrigen basiert die gerade beim FBI entwickelte digitale Datenbasis von Fingerabdrücken vollständig auf Wavelet-Transformationen. Allerdings wurden hierbei zusätzlich spezifische Eigenschaften dieses Gebietes mit eingearbeitet. Man bedenke, daß es extrem viele verschiedene Wavelets und somit auch Wavelet-Transformationen gibt. Das ist einerseits ein Segen, weil man adaptieren kann. Auf der anderen Seite sind derartige Freiheitsgrade aber auch nicht ganz risikofrei.

Ein wenig Mathematik

Überraschenderweise scheint die Reichweite der Wavelet-Transformation durchaus bis in den Bereich der numerischen Mathematik zu gehen. Eine dieser Querverbindungen interpretiert sehr große Matrizen einfach als Bilder. Die Hoffnung ist nicht unbegründet, daß eine erfolgreiche Bildkomprimierung auch grundlegende Eigenschaften der zugeordneten Matrix konserviert. Im Blickpunkt der Forscher sind dabei insbesondere riesengroße Matrizen, wie sie etwa im Zusammenhang mit bestimmten Fragestellun-

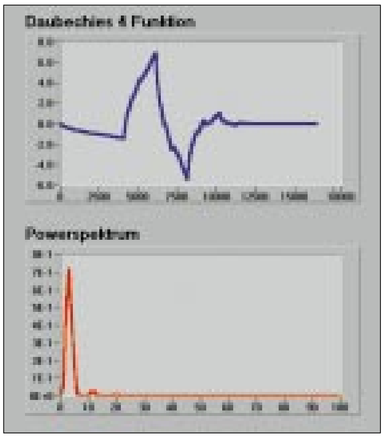

Bild 6.
Das Daubechies 4 Wavelet ist sowohl zeitlich (oben) als auch im Frequenzbereich (unten) gut lokalisiert. Es treten nur wenige von Null verschiedene Koeffizienten in der Fourier-Transformation auf.

gen der Physik und Technik auftauchen (speziell: partielle Differentialgleichungen). Die Kompression führt im Idealfall zu einer enormen Rechenzeitersparnis. Es ist momentan noch nicht klar erkennbar, ob diese Ansätze schon in naher Zukunft in Produkte überführt werden, die vielen Ingenieuren und Wissenschaftlern neue Wege eröffnen würden. Vieles spricht jedenfalls dafür.

Wigner-Ville- und die Choi-Williams-Distributionen

Die Wigner-Ville-Distribution ist trotz ihrer relativ einfachen Definition ein sehr mächtiges Werkzeug bei Signalanalysen. Die ursprünglichen Anwendungen lagen auf dem Gebiet der Quanten-Physik, gegenwärtig steht die gesamte Signalverarbeitung zur Diskussion. Die Definition der Wigner-Ville-Distribution WVD erinnert stark an die Autokorrelation eines gegebenen Signals s(t).

$$\mathrm{WVD}(t,\omega) = \int s\left(t+\frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \exp(-j\omega\tau)\, d\tau \qquad (5)$$

Die Wigner-Ville-Distribution liefert ein reellwertiges Transformationsergebnis, was häufig ein wirklicher Vorteil ist.

Die Choi-Williams-Distribution wurde 1989 veröffentlicht. Diese Transformation stellt eine Verallgemeinerung der Wigner-Ville Distribution dar und reduziert den unerwünschten Seiteneffekt von Überkreuzverbindungen im Zeit-Frequenz-Signal. Zur Vermeidung der erwähnten Effekte werden Integrale mit passenden Kernen aufgebaut.

Die beiden genannten Vertreter der bilinearen Transformationen spielen eine dominante Rolle, jedoch gibt es zahlreiche weitere Vorschläge. Hierbei kann sich je nach Anwendung die eine oder andere Transformation als die geeignete herausstellen.

Radartechnik und JTFT

Radar spielt eine große Rolle bei der Detektion und beim Vermessen von Zielen. Durch die großen Fortschritte der letzten Jahrzehnte gelingt es heute aber auch, Bilder von fliegenden Objekten oder Landschaften zu generieren und zwar unabhängig von der konkreten Situation.

Radar basiert auf der Aussendung elektromagnetischer Wellen mit nachfolgender Erfassung des zurückgestreuten Signals. Jede Unebenheit oder Ecke eines Objektes wirkt als Streuer und hat ein charakteristisches Rückstreuverhalten. Ist man an hochauflösenden Radarbildern interessiert, muß man sowohl die Bandbreite des Signals als auch die Aufnahmezeit erhöhen. Dabei zeigt aber das aufgenommene Signal ein nichtstationäres Verhalten. Da die Auswertung von Radarbildern auf Doppler-Effekten basiert und diese mit Hilfe der Fourier-Transformation bestimmt werden, entsteht das bereits weiter oben genannte Problem. Einer der ganz modernen und erfolgreichen Auswege aus diesem Dilemma besteht im Einsatz der JTFT.

Kombiniert man die JTFT mit breitbandig ausgestrahlten Wellen und hochspezialisierten Rekonstruktionsalgorithmen, so gelingt eine ausgezeichnete Erfassung fliegender Objekte im Sinne bildgebender Verfahren.

Der nächste Teil der Serie befaßt sich mit Problemen der Bildverarbeitung. Es zeigt sich, daß dieses Gebiet nicht nur einfach eine zweidimensionale Variante bereits bekannter Ideen ist. *gs*

Literatur

[1] *Wenzel, L.*: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 1. *Elektronik* 1998, H. 23, S. 96ff.
[2] *Wenzel, L.*: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 2. *Elektronik* 1998, H. 25, S. 86ff.
[3] *Wenzel, L.*: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 3. *Elektronik* 1999, H. 1, S. 52ff.
[4] *Wenzel, L.*: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 4. *Elektronik* 1999, H. 3, S. 48ff.
[5] *Wenzel, L.*: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 5. *Elektronik* 1999, H. 5, S. 60ff.
[6] *Wenzel, L.*: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 6. *Elektronik* 1999, H. 7, S. 58ff.
[7] *Wenzel, L.*: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 7. *Elektronik* 1999, H. 9, S. 62ff.
[8] *Wenzel, L.*: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 8. *Elektronik* 1999, H. 11, S. 62ff.
[9] *Wenzel, L.*: Digitale Signalverarbeitung ist keine Hexerei, Teil 9. *Elektronik* 1999, H. 13, S. 91ff.
[10] Die im Text angegebenen Programme stehen zum Download bereit unter: *www.natinst.com/germany*

Dr. Lothar Wenzel ist gebürtiger Berliner und hat Mathematik und Informatik in Greifswald und Dresden studiert. Nach Tätigkeiten in einem Kernkraftwerk und bei der BASF AG, Ludwigshafen, beschäftigt er sich z.Zt. bei National Instruments in Austin, Texas, mit dem Design von Algorithmen auf den Gebieten Simulation, Regelung, Mathematik und Bildverarbeitung.